
Problem 1 (4 Punkte)
Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $\gamma : [a, b] \to X$ ein Pfad. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind.

1. γ ist absolut stetig (Lipschitz),
2. Es existiert $l \in L^1([a, b])$ ($l \in L^\infty([a, b])$) so dass für alle $s \leq t \in [a, b]$ gilt:

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq \int_s^t l(\tau) d\tau.$$

Problem 2 (4 Punkte)
Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $\gamma : [a, b] \to X$ ein Pfad. Angenommen, die Geschwindigkeit $v_\gamma(t)$ existiert für alle $t \in [a, b]$ und ist stetig in t. Zeige, dass

$$\int_a^b v_\gamma(t) dt = L(\gamma).$$

Problem 3 (4 Punkte)
Beweise, dass für jeden Pfad $\gamma : [a, b] \to X$, nicht unbedingt einfach, gilt:

$$L(\gamma) = \sum_{k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} k \mathcal{H}^1(\{x \in X : \#\gamma^{-1}(x) = k\})$$

wobei # die Kardinalität einer Menge bezeichnet und wir die Konvention $0 \cdot \infty = 0$ verwenden.
Hinweis: Die rechte Seite ist ein Integral der Funktion $x \mapsto \#\gamma^{-1}(x)$ bezüglich $\mathcal{H}^1$. Benutze den Satz über die monotone Konvergenz von Integralen und erinnere dich daran, dass $\operatorname{diam} \gamma([a, b]) \leq \mathcal{H}^1(\gamma([a, b])) \leq L(\gamma)$ *ist.*

Abgabe am Mittwoch, 29. November bis 12 Uhr beim Assistenten.