Problem 1 (4 Punkte)
Betrachten Sie die Region $E = \{(x, y) : 0 \leq y \leq e^{-x}, x \geq 0\}$ mit der induzierten euklidischen Metrik. Dies ist die Region, die zwischen dem Graphen von e^{-x}, $x \geq 0$, der x-Achse und dem Segment $\{(0, y) : y \in [0, 1]\}$ eingeschlossen ist. Wir verkleben E, indem wir $(x, 0)$ mit $(x + 1, e^{-(x+1)})$ für alle $x \geq 0$ identifizieren. Zeigen Sie, dass der Durchmesser des resultierenden verklebten Raums endlich ist.

Hinweis: Betrachten Sie Pfade, die (n, e^{-n}) mit $(n, 0)$ verbinden. Verwende die folgende Abschätzung $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \leq \int_0^{\infty} e^{-x} dx =$.

Problem 2 (4 Punkte)
Man sagt, dass eine Gruppe G auf einer Menge X wirkt, wenn es eine Abbildung $\phi : G \times X \to X$, $(g, x) \to \phi(g, x) =: g(x)$ gibt, so dass

(i) $gh(x) = g(h(x))$, und

(ii) $e(x) = x$

für alle $g, h \in G$, $x \in X$. Hier ist e das Einselement von G.

Nun sei (X, d) ein Längenraum und $G \subset \mathrm{Iso}(X)$, wobei $\mathrm{Iso}(X)$ die Isometriegruppe von (X, d) ist. Wir führen eine Äquivalenzrelation R_G ein, durch xR_Gy, wenn und nur wenn $\exists g \in G$ mit $x = g(y)$. Wir definieren $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) := \inf\{d(x, y) : x \in \bar{x}, y \in \bar{y}\}$ für $\bar{x}, \bar{y} \in X/G$. Erinneren Sie sich daran, dass die Äquivalenzklasse $\bar{x}$ durch die Bahn $\{g(x) \in X : g \in G\}$ gegeben ist.

Zeigen Sie, dass $\bar{d}$ mit d_{R_G} übereinstimmt.

Problem 3 (4 Punkte)
Sei (X, d) ein Längenraum und sei $C(X)$ der metrische Kegel über X. Sei $\bar{\gamma} : [a, b] \to C(X)$ eine Kurve gegeben durch $\bar{\gamma}(t) = (r(t), \gamma(t))$ wobei γ eine Kurve in X ist. Beweisen Sie:
$$L(\bar{\gamma}) \geq \sqrt{r(a)^2 + r(b)^2 - 2r(a)r(b) \cos L(\gamma)}$$
falls $L(\gamma) \leq \pi$, und
$$L(\bar{\gamma}) \geq r(a) + r(b)$$
falls $L(\gamma) \geq \pi$.

Bonus Problem (4 Punkte)
Verwenden Sie ϵ-Mittelpunkte, um zu zeigen, dass das direkte Produkt von zwei Längenräumen (X, d_X) und (Y, d_Y) wieder ein Längenraum ist.

Abgabe am 06. Dezember bis 12 Uhr beim Assistenten.