Problem 1 (4 Punkte)
Betrachte zwei Längenräume X_1 und X_2 mit nichtpositiver (nichtnegativer) Krümmung. Zeige, dass das direkte metrische Produkt $X_1 \times X_2$ ein Längenraum mit nichtpositiver (nichtnegativer) Krümmung ist.
Hinweis: Betrachte ein Dreieck Δ in $X_1 \times X_2$ und lass Δ_1 und Δ_2 die Projektionen von Δ auf X_1 bzw. X_2 sein. Wähle Vergleichsdreiecke für Δ_1 und Δ_2 in $\mathbb{R}^2$ und konstruiere ein Vergleichsdreieck für Δ, das in einer Ebene in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ enthalten ist.

Problem 2 (4 Punkte)
Sei $F \in C^2([0, L])$ und $F'' = f$. Eine 1-Lipschitz-Funktion $g : [0, L] \to \mathbb{R}$ heißt f-konvex, wenn $g - F$ konkav ist. Zeige, dass

1. g stetig ist.
2. g rechts- und linksseitige Ableitungen hat, und die linksseitige Ableitung nicht größer ist als die rechtsseitige.
3. Die Menge der Punkte, an denen g nicht differenzierbar ist, endlich oder abzählbar ist.
4. Die Ableitung von g ist auf der Menge, wo sie definiert ist, stetig.

Bonus Problem (6 Punkte)
Zeige, dass die folgende Eigenschaft durch die Dreiecksbedingung für nichtpositive Krümmung impliziert wird, aber nicht äquivalent dazu ist. Für jedes Dreieck Δabc und jeden Mittelpunkt d und e seiner Seiten $[ab]$ und $[bc]$ gilt die Ungleichung $2|de| \leq |ac|$.
Hinweis: Betrachte einen normierten Vektorraum.

Abgabe am Dezember, 21. Dezember bis 12 Uhr beim Assistenten.