Problem 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Formel für die Erste Variation (4.21 Theorem) für einen beliebigen Pfad $\gamma : [0,T] \to X$ (nicht unbedingt ein kürzester Pfad) gültig ist, solange die Richtung von γ am Punkt $a = \gamma(0)$ wohldefiniert ist.

Problem 2 (4 Punkte)
Verallgemeinern Sie die Formel für die Erste Variation (4.21 Theorem) auf den Fall, wenn beide Endpunkte der kürzesten Pfade $\{\sigma_t\}_{t\in[0,T]}$ variabel sind und sich entlang zweier kürzester Pfade γ_1 und γ_2 mit konstanten Geschwindigkeiten v_1 und v_2 bewegen. Genauer gesagt, zeigen Sie, dass, wenn σ_t einen kürzesten Pfad zwischen $\gamma_1(t)$ und $\gamma_2(t)$ bezeichnet und eine Folge $\{\sigma(t_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ gegen σ_0 konvergiert, dann gilt

$$\lim_{i\to\infty} \frac{l(t_i) - l(0)}{t_i} = -v_1 \cos\alpha_1 - v_2 \cos\alpha_2$$

wobei $l(t) = L(\sigma_t) = |\gamma_1(t)\gamma_2(t)|$ und $\alpha_1 = \cos\angle(\sigma_0\gamma_1)$ und $\alpha_2 = \cos\angle(\sigma_0^-\gamma_2)$ mit $\sigma_0^- = \sigma_0(L(\sigma_0) - t)$.

Problem 3 (4 Punkte)
Formulieren Sie Abstands-, Winkel- und Monotoniebedingungen für Räume mit nach oben (nach unten) beschränkter Krümmung k für jedes $k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Äquivalenz dieser Bedingungen.

Bonus Problem (4 Punkte)
Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn $k_1 > k_2$, dann ist jeder Raum mit nach unten beschränkter Krümmung k_1 auch ein Raum mit nach unten beschränkter Krümmung k_2, und jeder Raum mit nach oben beschränkter Krümmung k_2 ist auch ein Raum mit nach oben beschränkter Krümmung k_1.

Abgabe am Donnerstag, 11. Januar bis 12 Uhr beim Assistenten.

Wir wüschen euch Frohe Weihnachten, eine erholsame Winterpause und einen guten Start ins neue Jahre!!!