
Problem 1 (4 Punkte)
Sei X ein metrischer Raum, und sei $\mathfrak{M}(X)$ die Menge der abgeschlossenen Teilmengen von X. Betrachten Sie eine Folge $A_i \in \mathfrak{M}(X)$, die gegen eine Menge $A \in \mathfrak{M}(X)$ bezüglich des Hausdorff-Abstands in X konvergiert (kurz: $A_i \xrightarrow{H} A$ in X, oder $A_i \xrightarrow{H} A$ in $\mathfrak{M}(X)$). Zeigen Sie, dass

(a) A die Menge der Grenzwerte aller konvergenten Folgen $\{a_n\}$ in X ist, wobei $a_n \in A_n$ für alle n.

(b) $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m}$.

(c) Angenommen, X ist kompakt. Wenn $A_{i+1} \subset A_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $\{A_i\}$ in $\mathfrak{M}(X)$ gegen den Schnitt $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Wenn $A_{i+1} \supset A_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{M}(X)$ gegen den Abschluss der Vereinigung $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$.

(d) Sei $A_i \xrightarrow{H} A$ in $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ und alle Mengen A_i sind konvex. Zeigen Sie, dass A konvex ist.

Problem 2 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $d_{GH}(X, Y) < \infty$ gilt, wenn X und Y beschränkte metrische Räume sind.

(b) Seien X und Y metrische Räume und $\operatorname{diam} X < \infty$. Zeige, dass $d_{GH}(X, Y) \geq \frac{1}{2}|\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y|$.

(c) Sei P ein metrischer Raum, der aus einem Punkt besteht. Zeige, dass $d_{GH}(X, P) = \operatorname{diam}(X)/2$ für jeden metrischen Raum X gilt.

Problem 3 (4 Punkte)
Seien X, Y zwei metrische Räume. Erinnere daran, dass die Dilatation einer Lipschitzabbildung $f : X \to Y$ definiert ist durch

$$\operatorname{dil} f = \sup_{x,x' \in X} \frac{d_Y(f(x), f(x'))}{d_X(x, x')}$$

Eine Homöomorphismus $f : X \to Y$ wird bi-Lipschitz genannt, wenn sowohl f als auch f^{-1} Lipschitzabbildungen sind.

Der Lipschitz-Abstand d_L zwischen zwei metrischen Räumen X und Y ist definiert durch

$$d_L(X, Y) = \inf_{f : X \to Y} \log(\max\{\operatorname{dil} f, \operatorname{dil} f^{-1}\})$$

wobei das Infimum über alle bi-Lipschitz-Homöomorphismen $f : X \to Y$ genommen wird. Wenn es keinen bi-Lipschitz-Homöomorphismus von X nach Y gibt, setzt man $d_L(X, Y) = \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass d_L nichtnegativ und symmetrisch ist und die Dreiecksungleichung erfüllt. Darüber hinaus gilt für kompakte metrische Räume X und Y, dass $d_L(X, Y) = 0$ genau dann, wenn X isometrisch zu Y ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Konvergenz von kompakten metrischen Räumen bzgl. d_L gleichmäßige Konvergenz impliziert.

(c) Zeigen Sie, dass die Konvergenz bzgl. d_L gleichbedeutend ist mit der gleichmäßigen Konvergenz im Rahmen der endlichen metrischen Räume.

Abgabe am Donnerstag, 18. Januar bis 12 Uhr beim Assistenten.