Problem 1 (4 Punkte)
Seien X, Y und Z metrische Räume, und $\mathfrak{R}_1$ eine Korrespondenz zwischen X und Y, sowie $\mathfrak{R}_2$ eine Korrespondenz zwischen Y und Z. Die Komposition von $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, bezeichnet als $\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2$, ist die Menge aller $(x, z) \in X \times Z$ für die es ein $y \in Y$ gibt, so dass $(x, y) \in \mathfrak{R}_1$ und $(y, z) \in \mathfrak{R}_2$.

(a) Zeige, dass $\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2$ eine Korrespondenz zwischen X und Z ist.

(b) Zeige, dass $\operatorname{dist} \mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2 \leq \operatorname{dist} \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$.

(c) Verwende (b), um einen alternativen Beweis der Dreiecksungleichung für den Gromov-Hausdorff-Abstand zu geben.

Problem 2 (4 Punkte)
Beweise die folgende Verallgemeinerung von Satz 5.19 aus der Vorlesung: Wenn X und Y metrische Räume mit $d_{GH}(X, Y) = 0$ sind, X kompakt ist und Y vollständig ist, dann sind X und Y isometrisch.

Problem 3 (4 Punkte)
Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von metrischen Räumen, und X sei ein endlicher metrischer Raum der Kardinalität N, $X = \{x_i : 1 \leq i \leq N\}$.

(a) Nehme an, dass $X_n \overset{GH}{\to} X$. Zeige, dass für alle hinreichend großen n die Kardinalität von X_n mindestens N ist.

(b) Zeige, dass $X_n \overset{GH}{\to} X$ genau dann gilt, wenn folgendes zutrifft. Für alle hinreichend großen n kann X_n in eine disjunkte Vereinigung von N nicht-leeren Mengen $X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,N}$ aufgeteilt werden, sodass für alle i, j gilt

$$\operatorname{diam} X_{n,i} \to 0, \quad d(X_{n,i}, X_{n,j}) \to |x_i x_j| \quad \text{für } n \to \infty.$$

Bonus Problem (4 Punkte)
Sei N eine feste natürliche Zahl. Zeige, dass die Lipschitz-, uniforme und Gromov-Hausdorff-Konvergenz dieselbe Topologie in der Klasse der endlichen metrischen Räume der Kardinalität N bestimmen.

Abgabe am Donnerstag, 25. Januar bis 12 Uhr beim Assistenten.