
Problem 1 (8 Punkte)
Seien X_n, X kompakte metrische Räume. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $(X_n, o_n) \overset{GH}{\to} (X, o)$ impliziert $X_n \overset{GH}{\to} X$.

(b) Falls $X_n \overset{GH}{\to} X$ und $o \in X$, dann kann man $o_n \in X_n$ wählen, sodass $(X_n, o_n) \overset{GH}{\to} (X, o)$.

(c) Betrachten Sie punktierte metrische Räume (X_n, o_n) für $n \in \mathbb{N}$ und (X, o), so dass $(X_n, o_n) \overset{GH}{\to} (X, o)$. Nehmen Sie an, dass X ein Längenraum ist. Dann gilt $B_r(o_n) \overset{GH}{\to} B_r(o)$ für alle $r > 0$.

(d) Sei $(X_n, o_n) \overset{GH}{\to} (X, o)$. Nehmen Sie an, dass X_n beschränkt kompakt ist und X vollständig ist. Dann ist X beschränkt kompakt.

Problem 2 (4 Punkte)
Beweisen Sie, dass die Vierpunktbedingung aus der Vorlesung äquivalent zur folgenden modifizierten Vierpunktbedingung ist: Für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U, so dass für jedes 4-tupel $(a; b, c, d)$ in U ein 4-tupel $(\bar{a}; \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ in der k-Ebene existiert, sodass die Segmente $[\bar{a}, \bar{b}]$, $[\bar{a}, \bar{c}]$ und $[\bar{a}, \bar{d}]$ den vollen Winkel bei $\bar{a}$ in drei Winkel teilen, die kleiner als π sind, und es gilt $|\bar{a}\bar{b}| = |ab|$, $|\bar{a}\bar{c}| = |ac|$, $|\bar{a}\bar{d}| = |ad|$, $|\bar{b}\bar{c}| \geq |bc|$, $|\bar{c}\bar{d}| \geq |cd|$ und $|\bar{d}\bar{b}| \geq |db|$.

Bonus Problem (4 Punkte)
Konstruieren Sie einen metrischen Raum X mit zwei Punkten $p, q \in X$, so dass die Bälle $B_r(p)$ und $B_r(q)$ für jedes $r > 0$ isometrisch sind, aber es keine Isometrie von X auf sich selbst gibt, die p nach q abbildet.

Hinweis: Es gibt ein Beispiel unter endlichen Räumen.

Abgabe am Donnerstag, 2. Februar bis 12 Uhr beim Assistenten.