Problem 1 (4 Bonuspunkte)
Sei X ein kompakter Alexandrov-Raum mit Krümmung ≥ 1 und $\operatorname{diam}_X = \pi$. Zeigen Sie, dass X isometrisch zu einer sphärischen Aufhängung über einem kompakten Alexandrov-Raum mit Krümmung ≥ 1 ist. Eine sphärische Aufhängung über einem metrischen Raum Y mit $\operatorname{diam}_Y \leq \pi$ ist der Quotientenraum $[0,\pi] \times Y/\sim$, erzeugt durch $(0,x) \sim (0,y)$ und $(\pi,x) \sim (\pi,y)$, ausgestattet mit der Metrik d_S, gegeben durch

$$\cos d_S((s,x),(t,y)) = \cos s \cos t + \sin s \sin t \cos d_Y(x,y).$$

Hinweis: Seien $p,q \in X$ mit $|pq| = \pi$. Definieren Sie $Y = \{x \in X : |px| = |qx| = \pi/2\}$. Zeigen Sie dann die folgenden Fakten: (1) $\forall x,y \in Y$ sind die kürzesten Pfade $[px]$ und $[qx]$ eindeutig und $\angle pxy = \angle qxy = \angle pyx = \angle qyx = \pi/2$. Insbesondere sind die Dreiecke isometrisch zu Vergleichsdreiecken in der 1-Ebene. (2) Y ist eine konvexe Teilmenge von X. (3) Y ist ein Alexandrov-Raum mit Krümmung ≥ 1. (4) Jeder Punkt in X gehört zu einem kürzesten Pfad, der p und q verbindet.

Problem 2 (4 Bonuspunkte)
Der Radius rad_X eines kompakten metrischen Raums X ist die minimale Zahl $r > 0$, sodass $X = \overline{B}_r(p)$ für ein $p \in X$. Zeigen Sie, dass

(a) $\frac{1}{2}\operatorname{diam}_X \leq \operatorname{rad}_X \leq \operatorname{diam}_X$ für jeden metrischen Raum X.

(b) Wenn X ein n-dimensionaler Alexandrov-Raum mit Krümmung ≥ 1 und $\operatorname{rad}_X = \pi$, dann ist X isometrisch zu $\mathbb{S}^n$.

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis von Problem 1.

Problem 3 (4 Bonuspunkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jeden Alexandrov-Raum X mit Krümmung ≥ 1 und $\dim_H X \leq n$ folgendes gilt.

1. Wenn $\operatorname{diam}_X > \pi - \delta$, dann ist X im Gromov-Hausdorff-Sinn ϵ-nah an einer sphärischen Aufhängung über einem Alexandrov-Raum Y mit Krümmung ≥ 1 und $\dim_H Y \leq n-1$.
2. Wenn $\operatorname{rad}_X > \pi - \delta$, dann ist X im Gromov-Hausdorff-Sinn ϵ-nah an $\mathbb{S}^k$ für $k \in \{2,\ldots,n\}$.

Problem 4 (4 Bonuspunkte)
Sei Y ein $(n-1)$-dimensionaler Alexandrov-Raum mit Krümmung ≥ 1, der n Paare von Punkten $\{(x_i,y_i\}$ enthält, so dass $|x_iy_i| = \pi$ für alle i und die Determinante der $n \times n$-Matrix $(\cos|x_ix_j|)_{i,j}$ nicht null ist. Zeige Sie, dass Y isometrisch zu $\mathbb{S}^{n-1}$ ist.