Funktionentheorie

Christian Ketterer

31. Januar 2023

Inhaltsverzeichnis

18.10.2022

1 Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist die Menge $\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ zusammen mit der Addition $+$ $((x,y)+(\widetilde{x},\widetilde{y}) = (x+\widetilde{x}, y+\widetilde{y}))$ und einer Multiplikation $\cdot$ so dass $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ ein Körper ist. Der Punkt $(1,0) = 1$ soll das neutrale Element der Multiplikation sein. Weiterhin sei $(0,1) =: i$ und es soll gelten

$$i^2 = -1.$$

Bemerkung. Da $(1,0) =: 1$ und $(0,1) =: i$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden, lässt sich eine komplexe Zahl $z = (x,y)$ schreiben als

$$z = (x,y) = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy.$$

Aus den Körpergesetzen folgt

$$(x,y)\cdot(\widetilde{x},\widetilde{y}) = (x+yi)\cdot(\widetilde{x}+\widetilde{y}i) = x\widetilde{x} + y\widetilde{y}i^2 + (x\widetilde{y}+y\widetilde{x})i = (x\widetilde{x} - y\widetilde{y}, x\widetilde{y}+y\widetilde{x}).$$

1.1 Satz. *Die mit der Addition $+$ und der Multiplikation $\cdot$ versehene Menge $\mathbb{R}^2$ bildet einen Körper, den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.*

Beweisskizze. Es sind die Körperaxiome zu überprüfen.

- $(\mathbb{C},+)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $0 = (0,0)$.
- $(\mathbb{C}\backslash\{0\},\cdot)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $(1,0) = 1$.
- Es gilt das Distributivgesetz.

Für $z = x+iy \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ berechnet man das eindeutige multiplikative Inverse z^{-1} wie folgt. Es sei

$$\overline{z} := x - iy.$$

Dann $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 \in \mathbb{R}_{>0}$. Daraus folgt

$$z\frac{\overline{z}}{x^2+y^2} = 1.$$

Also gilt $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$. Insbesondere $i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$.

$\square$

1.2 Definition. Sei $z = x+iy \in \mathbb{C}$.

1. $\overline{z} = x - iy$ heißt die zu z konjugierte komplexe Zahl. Die Abbildung $z \in \mathbb{C} \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ heißt komplexe Konjugation,
2. $x =: \mathrm{Re}z \in \mathbb{R}$ heißt der Realteil von z, $y =: \mathrm{Im}z$ heißt der Imaginärteil von z,
3. $\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2} =: |z|$ heißt der Betrag von z.

Das Standardskalarprodukt zwischen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ is $\langle z_1, z_2\rangle = x_1x_2+y_1y_1$. Es gilt $z\overline{z} = \langle z, z\rangle$.

Bemerkung. • Die komplexe Konjugation ist die Spiegelung an der x-Achse in $\mathbb{R}^2$. Insbesondere ist die komplexe Konjugation eine lineare Abbildung.

- Es gilt $\overline{\overline{z}} = z$ sowie $\overline{z_1 z_1} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$ und $\overline{z} = z$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R} \times \{0\} \simeq \mathbb{R}$.
- Es gilt $\mathrm{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ und $\mathrm{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{i2}$.

1.3 Fakt. *Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann $z_1\overline{z}_2 = \langle z_1, z_2\rangle - i \det(z_1, z_2)$ wobei $(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$.*

1.4 Lemma. *1.* $|z| = |\overline{z}|$,

2. $|\mathrm{Re} z| \leq |z|$, $|\mathrm{Im} z| \leq |z|$,

3. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,

4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(Dreiecksungleichung).*

Beweis. Für 3. betrachte $|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)\overline{(z_1z_2)} = z_1\overline{z}_1 z_2\overline{z}_2 = |z_1|^2|z_2|^2$. □

Wir können eine komplexe Zahl $z = x + iy$ als Punkt (x, y) in $\mathbb{R}^2$ auffassen (*Gaußsche Zahlenebene*).

$|z|$ ist der Abstand von z zum Ursprung $(0, 0) = 0$.

Falls $z \neq 0$, dann gilt mit Polarkoordinaten folgende Darstellung

$$z = x + iy = (x, y) = (|z|\cos\varphi, |z|\sin\varphi) \text{ für ein } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Falls $|z| = 1$, gilt $z = (\cos\varphi, \sin\varphi) \in \mathbb{S}^1$.

Bemerkung. Wir schreiben auch $(\cos\varphi, \sin\varphi) = e^{i\varphi}$, obwohl wir die komplexe Funktion $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ noch nicht eingeführt haben. Die Funktionalungleichung $e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\varphi}e^{i\psi}$ ist dann äquivalent zu den Additionstheoremen für sin und cos. Insbesondere $\overline{z} = e^{-i\varphi}$ falls $z = e^{i\varphi}$.

20.10.2022

Falls Re$z > 0$, dann können wir φ wählen als

$$\varphi^{\text{Re}>0}(z) = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

wobei $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ die Umkehrfunktion von $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}$ ist.

Falls Im$z > 0$ kann der Winkel φ zum Beispiel gewählt werden als

$$\varphi^{\text{Im}>0}(z) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

wobei $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ die Umkehrfunktion von $\cos|_{[0,\pi]}$ ist. In den anderen Halbebenen gibt es entsprechend Winkelfunktionen

$$\varphi^{\text{Re}<0}(z) = \pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \quad \varphi^{\text{Im}<0}(z) = \pi + \arccos\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

$\varphi^{\text{Re}>0}, \varphi^{\text{Im}>0}, \varphi^{\text{Re}<0}$ und $\varphi^{\text{Im}<0}$ sind stetig. Die so definierten Winkel sind eindeutig bis auf Addition mit $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Somit gibt es eine wohldefinierte, stetige Funktion $\Phi : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, die jedem $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ den Winkel von $z \mod 2\pi\mathbb{Z}$ zuordnet. Genauer

$$\Phi(z) = \begin{cases} \varphi^{\text{Re}>0}(z) \mod 2\pi\mathbb{Z} & \text{falls } z \in \{\text{Re}z > 0\}, \\ \varphi^{\text{Im}>0}(z) \mod 2\pi\mathbb{Z} & \text{falls } z \in \{\text{Im}z > 0\}, \\ \varphi^{\text{Re}<0}(z) \mod 2\pi\mathbb{Z} & \text{falls } z \in \{\text{Re}z < 0\}, \\ \varphi^{\text{Im}<0}(z) \mod 2\pi\mathbb{Z} & \text{falls } z \in \{\text{Im}z < 0\}. \end{cases}$$

1.5 Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^2$.

- M heißt zusammenhängend, falls für alle $U, V \subset \mathbb{R}^2$ offen und disjunkt mit $M \subset U \cup V$ folgt, dass $M \subset U$ oder $M \subset V$.

- M heißt wegzusammenhängend, falls zu je zwei Punkten $x, y \in M$ ein stetige Kurve $\gamma \in C^0([0,1], M)$ existiert, so dass $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Bemerkung. Aus der Analysis 2 kennen wir die folgenden Aussagen:

1. M wegzusammenhängend $\Rightarrow$ M zusammenhängend.

2. Falls M offen gilt auch: M wegzusammenhängend $\Rightarrow$ M zusammenhängend.

   Falls M nicht offen ist, gilt diese Richtung im Allgemeinen nicht.

3. $f : M \to \mathbb{R}^2$ stetig und M zusammenhängend, dann folgt $f(M)$ ist zusammenhängend.

1.6 Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ zusammenhängend. Eine stetige Funktion $\varphi : G \to \mathbb{R}$, die jedem $z \in G$ einen Winkel $\varphi(z)$ zuordnet, so dass $\varphi(z) \mod 2\varphi\mathbb{Z} = \Phi(z)$, heißt Argumentfunktion (oder Winkelfunktion).

Zum Beispiel sind $\varphi^{\text{Re}>0}, \varphi^{\text{Im}>0}, \ldots$ Argumentfunktionen auf jeweils $\{\text{Re}z > 0\}, \{\text{Im}z > 0\}, \ldots$.

1.7 Lemma. *Sei $G \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ zusammenhängend. Sind $\varphi_1, \varphi_2 : G \to \mathbb{R}$ Argumentfunktionen auf G, so gibt es ein festes $k \in \mathbb{Z}$, so dass $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi k$.*

Beweis. Sei $z \in G$. Dann gilt $z = |z|e^{i\varphi_1(z)} = |z|e^{i\varphi_2(z)}$. Es folgt $1 = zz^{-1} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$. Dann folgt $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \mod 2\pi\mathbb{Z}$. Aber G ist zusammenhängend und $\varphi_1 - \varphi_2$ ist stetig. Also gilt $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. □

Bemerkung. Auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0}$ existiert eine Argumentfunktion. Eine solche Argumentfunktion lässt sich aus den Funktionen $\varphi^{\text{Re}>0}, \varphi^{\text{Im}>0}, \varphi^{\text{Re}<0}$ und $\varphi^{\text{Im}<0}$ konstruieren.

2 Komplex differenzierbar Funktionen

2.1 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(z_0) \equiv c \in \mathbb{C}$, falls

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = c$$

gilt. f heißt komplex differenzierbar auf Ω oder *holomorph* auf Ω, wenn f in allen Punkten $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbar ist. Falls f holomorph auf Ω, dann heißt die Funktion $z \in \Omega \mapsto f'(z)$ Ableitung von f.

Beispiele.

1. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konstant. Dann folgt: f ist komplex differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ und es gilt $f'(z_0) \equiv 0$. Insbesondere $f' \equiv 0$.

2. Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z$, ist komplex differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$, denn es gilt

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1.$$

   Insbesondere $f' \equiv 1$ auf $\mathbb{C}$.

2.2 Satz. *Falls $f : \Omega \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $z_0 \in \Omega$ ist, so ist f stetig in z_0.*

Beweis. Für $z \in \Omega$ definieren wir

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{falls } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{falls} z = z_0. \end{cases}$$

Dann ist g stetig in z_0 (nach Voraussetzung) und

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z) \quad \forall z \in \Omega.$$

Die rechte Seit ist stetig in z_0 und somit auch f. □

2.3 Satz. *Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $z_0 \in C$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Linearität der Ableitung*
   Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ist die die Funktion $\alpha f + \beta g : \Omega \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in z_0 mit
   $$(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0).$$

2. *Produktregel*
   Die Funktion $f \cdot g : \Omega \to \mathbb{C}$ ist komplex differenzierbar in z_0 mit
   $$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

3. *Quotientenregel*
   Ist $g(z_0) \neq 0$, so gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $g(z) \neq 0$ für alle $z \in B_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$. Dann ist $\frac{f}{g} : B_\epsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ in z_0 komplex differenzierbar mit
   $$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Beweis. Der Beweis wird wie im Reellen geführt. □

Beispiele.

1. Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, ein Polynom mit $a_k \in \mathbb{C}$. Dann ist P auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph mit
   $$P'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) a_{l+1} z^l.$$

2. Seien allgemeiner P und Q Polynome. Auf der offenen Menge $\{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\} =: \Omega$ ist die gebrochen rationale Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, definiert. f ist auf Ω holomorph mit Ableitung
   $$f'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q(z)^2}.$$

   Die Ableitung ist dann wieder eine gebrochen rationale Funktion.

Bemerkung. Wir können eine komplexe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ als eine Abbildung von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ interpretieren. Dafür schreiben wir $z = x + iy = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ wobei

$$u(x, y) = \mathrm{Re} f(x + iy), \ v(x, y) = \mathrm{Im} f(x + iy).$$

Zum Beispiel erhalten wir für $f(x + iy) = f(z) = z^2 = (x + iy)(x + iy) = x^2 - y^2 + i2xy$ und somit

$$u(x, y) = \mathrm{Re} f(x + iy) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = \mathrm{Im} f(x + iy) = 2xy.$$

Wiederholung: Reelle Differenzierbarkeit. Eine Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit U offen heißt (total) (reell) differenzierbar in $x_0 \in U$, falls eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert (das Differential von f in x_0), so dass

$$\left| \frac{f(x_0) - f(x) - L(x - x_0)}{|x - x_0|} \right| \to 0 \text{ falls } x \to x_0.$$

Hier ist $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2}$ die Euklidische Norm für $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Man schreibt $L = Df(x_0)$.

Eine Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit U offen besitzt Richtungsableitungen in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ in x_0, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$$

existiert. Falls wir für v die Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ betrachten, so heißen

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) =: \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0), \quad i = 1, \ldots, n,$$

die partiellen Ableitung von f in x_0.

Aus der Analysis 2 ist bekannt: falls eine Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ im Punkt $x_0 \in U$ total differenzierbar ist, dann existieren alle partiellen Ableitungen im Punkt $x_0 \in U$ und die darstellende Matrix von $Df(x_0)$ bzgl. der Standardbasis ist

$$\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} \right)_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n}.$$

Sei $f : \Omega \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ holomorph. Wir haben nun zwei verschiedene Begriffe für Differenzierbarkeit in einem Punkt für f.

2.4 Satz (Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen)**.** *Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, und $z_0 \in \Omega$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist in $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbar.*
2. *f ist in $z_0 \in \Omega$ als Abbildung $f = (u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar und es gilt in z_0*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Außerdem gilt dann in z_0

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

wobei $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$.

Beweis. Multiplikation mit einer komplexen Zahl $c \in \mathbb{C}$ ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Die zugehörige darstellende Matrix bzgl. der Standardbasis kann wie folgt berechnet werden. Sei $c = a + ib$ und $z = x + ib \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$cz = (a+ib)(x+iy) = ax - by + i(ay + bx) = \underbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}_{=:C \in \mathbb{R}^{2\times 2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Es gilt folgende Identität für beliebige $z, z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0) - C\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)}{\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right|} \right| = \left| \frac{f(z) - f(z_0) - c(z - z_0)}{|z - z_0|} \right| = \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - c \right|.$$

Sei nun f in z_0 komplex differenzierbar. Wir wählen $c = f'(z_0)$, also geht die rechte Seite gegen 0 für $z \to z_0$. Dies zeigt, dass f in z_0 auch als Abbildung von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar ist mit $Df(z_0) = C$ als Ableitung. Insbesondere gilt für $\mathrm{Re} f = u$ und $\mathrm{Im} f = v$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

im Punkt z_0.

Falls wir annehmen $f = u + iv = (u, v)$ ist als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ differenzierbar, mit einer Ableitung der Form

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

wobei $a = \frac{\partial u}{\partial x}$ und $b = -\frac{\partial u}{\partial y}$, dann folgt aus obiger Identität, dass

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \to c = a + ib$$

falls $z \to z_0$. Somit ist f komplex differenzierbar mit $f'(z_0) = c$.

Die übrigen Identitäten berechnet man aus den Differentialgleichungen. $\square$

25.10.2022

Beispiel. Die Funktion $f(z) = \overline{z}$ ist als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ linear und damit differenzierbar. Aber f is in keinem Punkt in $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, denn aus $u(x,y) = x$ und $v(x,y) = -y$ folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen sind also nirgend erfüllt.

Bemerkung. Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $c = a + ib \neq 0$ ist eine lineare Abbildung mit darstellender Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ bzgl. der Standardbasis e_1, e_2. Da $c = re^{i\varphi} = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ mit $r = \sqrt{a^2+b^2}$ und für eine $\varphi \in \mathbb{R}$, gilt

$$C = r \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\in SO(2)} \tag{1}$$

Die komplexe Differenzierbarkeit in $z_0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$ einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist also gleichbedeutend damit, dass

1. f als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist, und
2. das Differential $Df(z_0)$ ist eine *Drehstreckung* der Form (1) oder gleich 0 (d.h. das Differential $Df(z_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch die Multiplikation mit der komplexen Zahl $\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = f'(z_0)$).

2.5 Definition (Wirtinger Ableitungen)**.** Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ total differenzierbar.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right), \\
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

1. f ist genau dann holomorph, wenn $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \equiv 0$ auf Ω. In diesem Fall ist die komplexe Ableitung gegeben durch $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$.
2. Falls $\frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0$ auf Ω, dann heißt f anti-holomorph.

Bemerkung. f is anti-holomorph genau dann, wenn $z \mapsto f(\overline{z})$ holomorph. In diesem Fall gilt dann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

2.6 Definition. Eine lineare, bijektive Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt winkeltreu falls

$$\frac{\langle Tw, Tz\rangle}{|Tw||Tz|} = \frac{\langle w, z\rangle}{|w||z|} \quad \forall w, z \in \mathbb{R}^2.$$

Eine reell differenzierbare Abbildung $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt winkeltreu, falls ihr Differential $Df(z_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ für alle $z_0 \in \Omega$ winkeltreu ist.

Beispiel. Falls $(a,b) \neq (0,0)$, dann ist $z = x+iy \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ winkeltreu.

2.7 Lemma. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *ist winkeltreu,*

2. *Es gibt eine Zahl* $c \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\backslash\{0\}$*, so dass* $Tz = cz$ *oder* $Tz = c\overline{z}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. 2. $\Rightarrow$ 1. Falls $Tz = cz$ für $c = a+ib \in \mathbb{C}$, dann $cz = C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ für $C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Also ist T winkeltreu. Ebenso $Tz = c\overline{z}$ winkeltreu, da die Spiegelung $z \mapsto \overline{z}$ winkeltreu ist, und die Komposition von winkeltreuen Abbildungen bleibt winkeltreu.
1. $\Rightarrow$ 2. Es gilt, dass $T1 = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma \in \mathbb{C}^\times$, da T bijektiv ist. Wir schreiben $w = \gamma^{-1}Ti$ und es gilt

$$0 = \langle 1, i\rangle = \langle T1, Ti\rangle = \langle \gamma, \gamma w\rangle = \mathrm{Re}(\gamma\overline{\gamma w}) = \mathrm{Re}(|\gamma|^2\overline{w}) = |\gamma|^2\mathrm{Re}w.$$

Damit folgt $\mathrm{Re}w = 0$. Also ist $w = ri$ für $r \in \mathbb{R}$. Also können wir schreiben

$$Tz = xT1 + yTi = \gamma\left(x + \gamma^{-1}Tiy\right) = \gamma(x + yri)$$

und $\langle Tz, T1\rangle = \langle \gamma, \gamma(x+iry)\rangle = |\gamma|^2 x$. Weil T winkeltreu ist, folgt

$$|z||\gamma|^2 x = |z|\langle Tz, T1\rangle = |T1||Tz|\langle z, 1\rangle = |\gamma|x|\gamma||x+yri| = |z||\gamma|^2 x.$$

Es folgt $|x+iy| = |x+iry|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $x \neq 0$. Es folgt $r = \pm 1$, also $Tz = \gamma(x \pm iy)$. $\square$

2.8 Korollar. *Sei* $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *reell (total) differenzierbar in* Ω*. Falls* f *holomorph mit* $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ *in jedem Punkt bzw. anti-holomorph mit* $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ *in jedem Punkt, so ist* f *winkeltreu.*

2.9 Satz. *Sei* Ω *ein Gebiet, d.h. offen und zshg. Falls* $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *stetig differenzierbar ist* ($f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$) *und winkeltreu in* Ω*, so ist* f *holomorph in* Ω *mit* $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$*, oder anti-holomorph in* Ω *mit* $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$.

Beweis. Nach dem Lemma 2.7 gilt, dass f winkeltreu ist, falls für alle $z \in \Omega$ gilt $Df(z)w = c(z)w$ oder $Df(z)w = c(z)\overline{w}$ für $c(z) \in \mathbb{C}^\times$. Da die Multiplikation mit $c = a+ib \in \mathbb{C}^\times$ gegeben ist durch $C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, folgt also, dass

$$Dfw = \frac{\partial f}{\partial z}w \text{ und } \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}w = 0 \text{ oder } Dfw = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}w \text{ und } \frac{\partial f}{\partial z}w = 0 \text{ in } \Omega.$$

Da $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, ist die Abbildung $z \in \Omega \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z) - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)\right) / \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z)w + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)\right) \in \{-1, 1\}$ stetig. Da Ω zusammenhängend ist, muss deshalb entweder $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ oder $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ sein. $\square$

2.10 Korollar. *Ist* $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorph und sogar in* $C^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$*, so sind Real- und Imaginärteil von* f *harmonische Funktionen auf* Ω*, d.h.*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \textit{auf} \ \ \Omega.$$

Bemerkung. Die Annahme $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ist überflüssig, da wir zeigen werden, dass holomorphe Funktionen C^∞ sind.

Beweis. Zum Beispiel berechnen wir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

□

2.11 Satz (Kettenregel)**.** *Seien $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : V \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit Ω, V offen, und $f(\Omega) \subset V$. Sei f komplex differenzierbar in $z_0 \in \Omega$ und g sei komplex differenzierbar in $w_0 = f(z_0)$. Dann ist $g \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in z_0 und es gilt*

$$(g \circ f)'(z_0) = g' \circ f(z_0) f'(z_0).$$

Beweis. Der Beweis funktioniert wieder wie für die reelle Differenzierbarkeit. Wir betrachten für $z \neq z_0$ den Differenzenquotienten

$$\frac{g \circ f(z) - g \circ f(z_0)}{z - z_0} = \begin{cases} \frac{g \circ f(z) - g \circ f(z_0)}{f(z) - f(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{falls } f(z) \neq f(z_0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir definieren nun $h : V \to \mathbb{C}$ durch

$$h(w) = \begin{cases} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} & \text{falls } w \neq w_0 \\ g'(w_0) & \text{falls } w = w_0. \end{cases}$$

Da g differenzierbar ist in w_0, ist h stetig in w_0. Somit folgt für $z \neq z_0$:

$$\frac{g \circ f(z) - g \circ f(z_0)}{z - z_0} = h(f(z)) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \to g'(w_0) f'(z_0) \text{ falls } z \to z_0,$$

wobei das erste Gleichheitszeichen richtig ist für $f(z) \neq f(z_0)$ und für $f(z) = f(z_0)$. □

2.12 Satz (Konstanzsatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, d.h. offen und zusammenhängend, und sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $f' \equiv 0$ auf Ω, so ist f konstant.*

Beweis. Sei $f = u + iv$. Aus $f' \equiv 0$ folgt mit den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen, dass $f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$. Also ist $Du = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \equiv (0, 0)$. Da Ω offen und zusammenhängend, wissen wir aus der Analysis 2, dass u konstant ist. Für v argumentieren wir analog. □

Potenzreihen

Wir betrachten eine Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{wobei } a_k \in \mathbb{C}.$$

Die n-te Partialsumme der Reihe P ist das Polynom

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k.$$

Bemerkung.

1. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ein Reihe mit Gliedern $b_k \in \mathbb{C}$. Die Reihe konvergiert, falls die Folge der Partialsummen $\sum_{k=0}^{n} b_k = S_n$ konvergiert. Für den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n$ schreiben wir $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

2. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert absolut, falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ konvergiert. Insbesondere gilt
$$\left| \sum_{k=0}^{N+n} b_k - \sum_{k=0}^{N} b_k \right| \leq \sum_{k=N+1}^{N+n} |b_k| \to 0.$$
Somit ist die Folge der Partialsummen $\sum_{k=0}^{n} b_k$ eine Cauchfolge und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert.

2.13 Definition. Eine Folge von Funktionen $f_n : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konvergiert lokal gleichmässig gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, falls $\forall\ x_0 \in U$ eine Umgebung V existiert mit $\overline{V} = K$ kompakte und $K \subset U$ so, dass $f_n|_K \to f|_K$ gleichmässig, d.h. für jedes $\epsilon > 0$ existiert $n_{\epsilon,K} \in \mathbb{N}$, so dass
$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \ \forall x \in K, \ \forall n \geq n_{\epsilon,K}.$$

Die Grundlegende Frage zu Potenzreihen ist: Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Potenzreihe?

2.14 Satz. *Zu jeder Potenzreihe P gibt es genau ein $R \in [0, +\infty]$, so dass gilt:*

1. *Ist $|z| < R$, dann konvergiert $P(z)$ absolut,*

2. *Ist $|z| > R$, dann konvergiert $P(z)$ nicht absolut.*

Es gilt die Formel von Cauchy-Hadamard für den Konvergenzradius R:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Auf $B_R(0)$ konvergiert die Reihe lokal gleichmässig, insbesondere ist $P(z)$ stetig auf $B_R(0)$.

Beweis. Sei $\rho \in (0, R)$ beliebig. Es folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}.$$

Das heißt: es existiert ein $N(\rho) \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| < \rho^{-n}$ $\forall n \geq N(\rho)$. Wir wählen nun $\theta \in (0,1)$. Dann folgt für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq \theta\rho$

$$|a_n||z|^n \leq \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \leq \theta^n \quad \text{für alle } n \geq N(\rho).$$

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k||z|^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq \theta\rho$, und damit für alle $|z| < R$, da die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k$ konvergiert. Insbesondere konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ also absolut für alle $z \in B_R(0)$.

Außerdem gilt die Abschätzung

$$|P(z) - P_n(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||z|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \theta^k = \theta^{n+1} \sum_{l=0}^{\infty} \theta^l = \frac{\theta^{n+1}}{1-\theta} \text{ falls } n \geq N(\rho).$$

Da $\frac{\theta^{n+1}}{1-\theta} \to 0$ falls $n \to \infty$, existiert ein zu $\epsilon > 0$ ein $n_\epsilon \geq N(\delta)$, so dass $|P(z) - P_n(z)| \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_\epsilon$ und für alle $z \in \overline{B_{\theta\rho}(0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \theta\rho\}$. Also konvergiert P_n lokal gleichmässig gegen P.

Umgekehrt, falls $P(z)$ absolut konvergiert, dann gilt $|a_n||z|^n \leq 1$ für $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß. Also folgt

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{|z|}.$$

Also divergiert $P(z)$, falls $R < |z|$. □

Bemerkung. Die Formel von Cauchy-Hadamard ist nicht immer optimal geeignet zur Bestimmung des Konvergenzradius (z.B. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$). Sehr hilfreich ist dann das *Quotientenkriterium*: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit a_k für alle $k \in \mathbb{N}$ bis auf endlich viele. Falls der der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = R \in (0, +\infty]$$

existiert (also bestimmt divergenter Grenzwert für $R = \infty$), dann ist der Konvergenzradius gegeben durch R.

Bemerkung. Hat die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ den Konvergenzradius $R \in (0, +\infty]$, so haben auch die durch gliedweise Differentation und Integration enstehenden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \quad \& \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} a_k z^{k+1}$$

den Konvergenzradius R.

2.15 Lemma. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho \in (0, +\infty]$. Dann ist die durch*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

gegebene Funktion $f : B_\rho(0) \to \mathbb{C}$ holomorph und die Ableitung kann gliedweise gebildet werden, d.h.

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}.$$

Beweis. Wir betrachten die Differenz zwischen Differenzenquotient und formaler Ableitung:

$$\frac{1}{h}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z+h)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right] - \sum_{k=0}^{\infty} k a_k z^{k-1} = \sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{a_k(z+h)^k - a_k z^k}{h} - k a_k z^{k-1}\right] = (*).$$

Dieser Ausdruck ist wohldefiniert und endlich für jedes $h \in \mathbb{C}$ mit $z + h \in B_\rho(0)$, da alle Reihen auf $B_\rho(0)$ absolute konvergieren. Wir können deshalb jeden einzelnen Summanen $\frac{(z+h)^k - z^k}{h} - kz^{k-1}$ untersuchen. Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} h^{l-1} z^{k-l} - \frac{1}{h} z^k - kz^{k-1} = \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} h^{l-1} z^{k-l} - kz^k = \sum_{l=2}^{k} \binom{k}{l} h^{l-1} z^{k-l}.$$

Der Betrag des letzten Ausdruck auf der rechten Seite lässt sich abschätzen wie folgt

$$|h| \sum_{l=0}^{k-2} \binom{k}{l+2} |h|^l |z|^{k-2-l} \leq |h| k(k-1) \sum_{l=0}^{k-2} \binom{k-2}{l} |h|^l |z|^{k-2-l} = |h| k(k-1)(|h|+|z|)^{k-2}.$$

Beachte dazu, dass $\binom{k}{l+2} = \frac{k!}{(l+2)!(k-l-2)!} \leq k(k-1)\frac{(k-2)!}{l!(k-2-l)!}$.

Wähle h nun so klein, dass $|z| + |h| = r < \rho$. Insbesondere gilt für $z + h$, das wir so erhalten, dass $|z + h| \leq |z| + |h| < \rho$ und somit $z + h \in B_\rho(0)$. Dann betrachten wir

$$|(*)| \leq |h| \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)|a_n| \left(|h| + |z|\right)^{n-2} \leq |h| \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)|a_n| r^{k-2}.$$

Die letzte Reihe auf der rechten Seite ist die formal Ableitung der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k$ und konvergiert deshalb für $r \in (0, \rho)$.

Für $|h| \to 0$ folgt deshalb, dass $|(*)| \to 0$. $\square$

03.11.2022

2.16 Korollar. *Die Exponentialfunktion*

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

ist auf ganz $\mathbb{C}$ *holomorph und* $\exp'(z) = \exp(z)$.

Ebenso sind die komplexen trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus

$$\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \textit{und} \quad \cos z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k} \frac{z^{2k}}{k!}$$

holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ *und* $\sin' z = \cos z$ *sowie* $\cos' z = -\sin z$.

Es gilt $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$.

Bemerkung. Holomorphe Funktionen, die auf ganz $\mathbb{C}$ definiert sind, heißen ganze Funktionen.

2.17 Satz. *Sei* $G \subset \mathbb{C}$ *ein Gebiet. Sei* $f : G \to \mathbb{C}$ *eine holomorphe Funktion mit* $f' = f$. *Dann gibt es* $a \in \mathbb{C}$, *so dass* $f = a \exp$ *auf* G.

Beweis. Zuerst zeigen wir $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$. Dazu sei $g(z) = \exp(z)\exp(-z)$. Es folgt $g(0) = 1$ und $g'(z) = 0$. Es folgt $g \equiv 1$.

Betrachten Sie $h(z) = f(z)\exp(-z)$. Dann gilt $h'(z) = f'(z)\exp(-z) - f(z)\exp(-z) = f(z)\exp(-z) - f(z)\exp(-z) = 0$. Nach dem Konstanzsatz gibt es dann ein $a \in \mathbb{C}$, so dass $h \equiv a$. Deshalb folgt $f(z) = a\exp(z)$. □

2.18 Fakt. *Es gilt*

(a) $\overline{\exp z} = \exp \overline{z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

(b) $\exp(w)\exp(z) = \exp(w + z)$ $\forall w, z \in \mathbb{C}$ *(Funktionalgleichung)*.
Insbesondere $\exp(x + iy) = \exp x \exp(iy) = \exp(x)(\cos y + i \sin y)$.

(c) $|\exp z| = 1 \;\Leftrightarrow\; z \in i\mathbb{R}$, *d.h.* $\mathrm{Re} z = 0$.
Insbesondere also $1 = |\exp(ix)|^2 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2$.

(d) $\exp(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

(e) $\exp x > 0$ *für* $x \in \mathbb{R}$. *Insbesondere* $\exp' x = \exp x > 0$, *also ist* $\exp$ *ist streng monoton wachsend auf* $\mathbb{R}$. *Deshalb auch* $\exp x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Beweis. (a) ist eine Übungsaufgabe.

Für (b) sei $w \in \mathbb{C}$ fixiert und betrachte die holomorphe Funktion $f(z) = \exp(z + w)$. Es gilt $f'(z) = f$, also folgt $f(z) = a \exp z$ für ein $a \in \mathbb{C}$. Wählen wir $z = 0$, dann folgt $a = f(0) = \exp(w)$.

Für (c) betrachten wir

$$1 = |\exp z|^2 = \exp z \overline{\exp z} = \exp z \exp \overline{z} = \exp(z + \overline{z}) = \exp(2\mathrm{Re} z).$$

Also folgt $\mathrm{Re} z = 0$.

(d) folgt aus $\exp(z)\exp(-z) = 1 \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Aus der Reihendarstellung folgt $\exp x \geq 1 + x > 0$ falls $x \in \mathbb{R}$ und $x \geq 0$. Also auch $\exp(x) = (\exp(-x))^{-1} > 0$ für $x < 0$. Somit $\exp'(x) = \exp(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. $\square$

Bemerkung (ohne Beweis). Die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{\times}$ is ein surjektiver Gruppenhomomorphismus zwischen $(\mathbb{C}, +)$ und $(\mathbb{C}^{\times}, \cdot)$.

2.19 Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt periodisch, falls es eine komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}^{\times}$ gibt, so dass $f(z + w) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Zahl w heißt dann eine Periode von f. Ist f periodisch, dann bezeichnet $\mathrm{Per}(f)$ die Menge aller Perioden von f und $\{0\}$.

Bemerkung. $\mathrm{Per}(f)$ ist eine additive Untergruppe von f.

2.20 Satz. *Es gibt genau eine positive Zahl π, so dass gilt $\mathrm{Per}(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}$.*

Beweis. Wir betrachten zunächste $K = \{w \in \mathbb{C} : \exp(w) = 1\}$. Es gilt $0 \in K$, aber da $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{\times}$ surjektiv ist, existiert $a \in \mathbb{C}^{\times}$ mit $\exp(a) = -1$. Also gilt $2a \in K$.

Außerdem folgt aus $|\exp(w)| = 1$ für $w \in K$, dass $K \subset \mathbb{R}i$.

Sei $\tau = \min\{t > 0 : ti \in K\}$. Es gilt dann $\tau > 0$. Sonst gäbe es eine Folge $t_k \downarrow 0$ mit $\exp(t_k i) = 1$ und es würde folgen

$$1 = \exp(0) = \exp'(0) = \lim_{k\to\infty} \frac{\exp(t_k) - \exp(0)}{t_k} = 0.$$

Nun gilt $\exp(z + \tau i) = \exp(z)$ also ist τi eine Periode von exp sowie jedes $w \in \tau i\mathbb{Z}$. Wir setzen $\tau = 2\pi$.

Es bleibt zu zeigen, dass es keine weiteren Perioden gibt. Ist $\exp(z+w) = \exp(z)$, dann folgt für $w = u + iv$, dass $1 = \exp(z + w)\exp(-z) = \exp(w) = \exp(u)\exp(iv)$. Aus dem vorigen Fakt folgt deshalb $u = 0$. Durch Abziehen eines Vielfachen von $2\pi i$ (denn Vielfache von $2\pi i$ sind Perioden) können wir annehmen, dass $v \in [0, 2\pi)$. Das aber widerspricht der MInimalität von 2π. $\square$

Bemerkung. exp bildet also den Streifen $\mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ injektiv auf sein Bild ab, denn ist $\exp(z_1) = \exp(z_2)$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$, folgt zunächst $\exp(x_1) = \exp(x_2)$ und $\exp(i(y_1 - y_2)) = 1$. Also gilt $x_1 = x_2$ und $iy_1 - iy_2 \in K \cap [0, 2\pi)$ und somit ist $y_1 = y_2$.

Bemerkung. Eine Zahl $b \in C$ heißt ein Logarithmus von $a \in \mathbb{C}$, falls $\exp(b) = a$.

2.21 Definition. Eine stetige Funktion $l : G \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt eine Logarithmusfunktion in G, falls $\exp \circ l(z) = z$ für alle $z \in G$.

2.22 Lemma. *Sei $l : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *l ist eine Logarithmusfunktion in G.*

2. *$l'(z) = \frac{1}{z}$ in G, und es gibt einen Punkt $a \in G$ mit $\exp(l(a)) = a$.*

Beweis. Übung. $\square$

2.23 Lemma. *Eine Logarithmusfunktion $l : G \to \mathbb{C}$ ist holomorph.*

Bemerkung. $g : B_1(1) \to \mathbb{C}$ gegeben durch die Potenzreihe $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(z-1)^k$ ist holomorphe und, da $g'(z) = \frac{1}{z}$ und $g(1) = 0$, eine Logarithmusfunktion.

Beweis. Sei $a \in G$. Da $\exp(l(a)) = a$, folgt $a \neq 0$. Betrachte die holomorphe Logarithmusfunktion $g : B_1(1) \to \mathbb{C}$. Dann ist auch $g_a : z \in B_{|a|}(a) \mapsto b + g(za^{-1})$ holomorph und eine Logarithmusfunktion wobei $b \in \mathbb{C}$, so dass $\exp(b) = a$. Es gilt

$$\exp(l(z) - g_a(z)) = 1.$$

Also folgt $l(z) - g_a(z) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ auf $G \cap B_{|a|}(a)$. Da $l - g_a$ stetig ist, ist $l - g_a$ lokal konstant. Also insbesondere konstant auf $B_r(a)$ für $r > 0$ klein genug. Damit ist l holomorph auf $B_r(a)$ und da $a \in G$ beliebig vorausgesetzt war, ist l holomorph. $\square$

2.24 Lemma. *Sei $l : G \to \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion auf G. Dann sind folgende Aussagen über eine Funktion $\hat{l} : G \to \mathbb{C}$ äquivalent:*

1. *$\hat{l}$ is eine Logarithmusfunktion in G,*
2. *$\hat{l} = l + 2\pi ik$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Da $\exp(l(z)) = \exp(\hat{l}(z))$ für alle $z \in G$, folgt $\exp(l(z) - \hat{l}(z)) = 1$. Es folgt, dass $l(z) - \hat{l}(z) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ für alle $z \in G$. Weil $l - \hat{l}$ stetig ist auf G und G zshg, folgt 1.

Umgekehrt folgt aus 2. leicht, dass $\hat{l} : G \to \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion. $\square$

Hauptzweig des Logarithmus Betrachte die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\leq 0}$. Dann ist $\mathbb{C}^-$ ein Gebiet, also zusammenhängend. Es existiert genau eine stetige Argumentfunktion $\varphi : \mathbb{C}^- \to (-\pi, \pi)$ mit $\varphi(1) = 0$. Sei außerdem $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ die reelle Logarithmusfunktion.

2.25 Korollar. *Die Funktion* $\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ *gegeben durch*

$$\log(z) = \ln|z| + i\varphi(z)$$

ist eine holomorphe Logarithmus funktion. $\log$ *heißt der Hauptzweig des Logarithmus. Die unendlich vielen Logarithmusfunktionen* $\log + 2\pi ik : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$*, $k \in \mathbb{Z}$, heißen Nebenzweige.*

08.11.2022

2.26 Definition. Ist eine Logarithmusfunktion $l : G \to \mathbb{C}$ gegeben, so heißt $p_\sigma : G \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp(\sigma l(z))$, die Potenzfunktion mit Exponent σ bzgl. l.

Falls $l = \log$ der Hauptzweig des Logarithmus ist, so schreiben wir $p_\sigma(z) = z^\sigma$ für die Potenzfunktion mit Exponent σ bzgl. log.

Bemerkung. p_σ is holomorph auf G, es gilt $p'_\sigma = \sigma p_{\sigma-1}$, und für alle $\sigma, \tau \in \mathbb{C}$ gilt: $p_\sigma p_\tau = p_{\sigma+\tau}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $p_n(z) = z^n$ in G.

Beispiel (Riemann'sche ζ-Funktion). Sei $z = re^{i\varphi}$ für $\varphi \in (-\pi, \pi)$ und $\sigma = s + it$. Dann

$$z^\sigma = \exp(\sigma \log z) = \exp((s + it)(\ln r + i\varphi)).$$

Es folgt $|z^\sigma| = |z|^s \exp(-\varphi t)$, insbesondere $|z^\sigma| \leq |z|^s \exp(\pi t)$.

Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z} =: \zeta(z)$ *konvergiert in* $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 1\}$ *absolut und lokal gleichmässig.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ und $z \in \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} \geq 1 + \epsilon\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $|n^z| = n^{\mathrm{Re} z} \geq n^{1+\epsilon}$. Somit folgt $|\zeta(z)| \leq \sum_{n=1}^\infty \left|\frac{1}{n^z}\right| \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$. Für $\epsilon > 0$ konvergiert die Reihe rechts. □

3 Der Cauchy Integralsatz

Komplexe Kurvenintegrale

3.1 Definition. Ein Abbildung $\gamma \in C^0([a, b], \mathbb{C})$ heißt Weg oder parametrisierte Kurve in $\mathbb{C}$. Wir sagen $\gamma \in C^0([a, b], \mathbb{C})$ ist stückweise stetig differenzierbar (stückweise C^1), falls es eine Unterteilung $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N = b$ gibt, so dass für alle $k \in \{1, \ldots, N\}$ gilt, dass die Einschränkung $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ stetig differenzierbar ist, d.h. $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \in C^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{C})$.

Das Bild $\gamma([a, b]) =: |\gamma|$ eines Weges $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt Spur und ist kompakt. Falls nichts anderes gesagt wir, seien Wege im Folgenden stets stückweise C^1.

Bemerkung.

(a) Falls $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt γ geschlossen.

(b) Sind Wege $\gamma_i \in C^0([a_i, b_i], \mathbb{C})$, $i = 1, 2$, mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ gegeben, so definieren wir den zusammengesetzten Weg durch

$$t \in [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \mapsto \gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \in [a_1, b_1], \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2) & \text{für } t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2]. \end{cases}$$

Sind γ_1, γ_2 stückweise C^1, so ist auch $\gamma_1 * \gamma_2$ stückweise C^1.

(c) Für ein Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ sei $\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma^-(t) = \gamma(b - a - t)$, der Weg, der die Spur von γ in entgegengesetzter Richtung durchläuft.

Beispiele.

(a) Für $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ ist der Weg $t \in [0, 1] \to (1 - t)z_0 + tz_1$ die gerade Strecke zwischen den Punkten z_0 und z_1.

(b) Für $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ ist $t \in [0, 2\pi] \to z_0 + re^{it}$ der geschlossene Wege der den Rand $\partial B_r(z_0)$ der Scheibe $B_r(z_0)$ durchläuft.

3.2 Definition. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg und $f : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$ stetig. Das komplexe Kurvenintegral von f entlang γ ist definiert durch

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt.$$

Bemerkung. Das komplexe Kurvenintegral ist ein Element in $\mathbb{C}$. Falls $\gamma \in C^1(I, \mathbb{C})$ gegeben ist durch $\gamma = \alpha + i\beta$ und $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, dann ist

$$f \circ \gamma(t)\gamma'(t) = u \circ \gamma(t)(\alpha)'(t) - v \circ \gamma(t)(\beta)'(t) + i \left(u \circ \gamma(t)(\beta)'(t) + v \circ \gamma(t)(\alpha)'(t)\right).$$

Real- und Imaginärteil dieses Ausdrucks sind stetige Funktionen. Das komplexe Kurvenintegral von f entlang γ ist somit komponentenweise als Riemann integral erklärt:

$$\int_a^b \left[u \circ \gamma(t)(\alpha)'(t) - v \circ \gamma(t)(\beta)'(t)\right] dt + i \int_a^b \left[u \circ \gamma(t)(\beta)'(t) + v \circ \gamma(t)(\alpha)'(t)\right] dt. \quad (2)$$

Falls $\gamma \in C^0([a, b], \mathbb{C})$ stückweise C^1, so ist γ' definiert und stetig auf jedem Teilinterval $[t_{k-1}, t_k]$. Somit ist der Ausdruck $(f \circ \gamma) \cdot \gamma'$ auf jedem offenen Teilinterval $[t_{k-1}, t_k)$ erklärt und stetig. Somit können wir das Kurvenintegral wie folgt definieren:

$$\int_\gamma f(z)dz := \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} f \circ \gamma(t)\gamma'(t)dt.$$

Die Wahl der Werte in den Punkten t_k spielt für den Wert des Riemann Integrals tatsächlich keine Rolle.

3.3 Definition. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stückweiser C^1 Weg. Eine stetig differenzierbare Bijektion $\varphi : [\widetilde{a}, \widetilde{b}] \to [a, b]$ mit $\varphi'(t) \neq 0 \; \forall t \in [\widetilde{a}, \widetilde{b}]$ heißt Parametertransformation und die stückweise C^1 Kurve $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ heißt Umparametrisierung von γ.

Bemerkung. Falls $\varphi : [\widetilde{a}, \widetilde{b}] \to [a, b]$ eine Parametertransformation, so gibt es eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : [a, b] \to [\widetilde{a}, \widetilde{b}]$ mit $(\varphi^{-1})'(t) = (\varphi' \circ \varphi^{-1}(t))^{-1}$. Da φ stetig differenzierbar ist, gilt entweder $\varphi' > 0$ und $\varphi(a) = \widetilde{a}, \varphi(b) = \widetilde{b}$, oder es gilt $\varphi'(t) < 0$ und $\varphi(a) = \widetilde{b}, \varphi(b) = \widetilde{a}$.

3.4 Lemma. *Sei γ ein stückweiser C^1 Wege und $\varphi : [\widetilde{a}, \widetilde{b}] \to [a, b]$ eine Parametertransformation. Sei $f : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann gilt*

1. $\int_\gamma f dz = \int_{\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi} f dz$ *, falls* $\varphi' > 0$,
2. $\int_\gamma f dz = -\int_{\widetilde{\gamma}} f dz$ *, falls* $\varphi' < 0$.

Insbesondere $\int_{\gamma^-} f dz = -\int_\gamma f dz$*, denn* $\gamma^-(t) = \gamma(b - a - t)$.

Beweis. Wir können annehmen, dass $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{C})$. Sonst zerlege das Interval in Teilintervalle. Zuerst berechnen wir mit der Kettenregel $\widetilde{\gamma}' = (\gamma' \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Wir nehmen an, dass $\varphi' > 0$. Mit der Substitutionsregel folgt dann

$$\int_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}} f \circ \widetilde{\gamma}(t)(\widetilde{\gamma})'(t)dt = \int_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}} f \circ \gamma \circ \varphi(t)\gamma' \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)=a}^{\varphi(b)=b} f \circ \gamma(s)\gamma'(s)ds.$$

Falls $\varphi' < 0$, dann $\varphi(\widetilde{a}) = \varphi(b)$, $\varphi(\widetilde{b}) = \varphi(a)$. Die selbe Rechnung ergibt die Behauptung. □

3.5 Lemma. *Seien $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ stückweise C^1 Wege mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Es gilt*

1. $\int_\gamma (\alpha f + \beta g)dz = \alpha \int_\gamma f dz + \beta \int_\gamma g dz$ *für $f, g : |\gamma| \to \mathbb{C}$ stetig,*
2. $\int_{\gamma_1 * \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz$ *für $f : |\gamma_1 * \gamma_2| \to \mathbb{C}$ stetig.*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass die Kurven γ, γ_1 und γ_2 C^1 sind. Dann folgen die Aussagen sofort aus den Eigenschaften des Riemann Integrals. □

3.6 Satz (Standardabschätzung)**.** *Für $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise C^1 und $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ gilt*

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq L(\gamma) \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)|$$

wobei $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$.

Beweis. Betrachte zuerst $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, $f = u + iv$. Es gilt

$$\int_a^b f(t)dt = \mathrm{Re} \int_a^b f(t)dt + i\mathrm{Im} \int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt =: (\alpha, \beta).$$

Wir zeigen zuerst $\left| \int_a^b f(t)dt \right| = |(\alpha,\beta)| \leq \int_a^b |f(t)|dt$. Hier ist $|(\alpha,\beta)| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Nun rechnen wir wie folgt

$$\begin{aligned} |(\alpha,\beta)|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \alpha \int_a^b u(t)dt + \beta \int_a^b v(t)dt &= \int_a^b (\alpha u(t) + \beta v(t))\, dt \\ &\leq \int_a^b |(\alpha,\beta)||u(t) + iv(t)|dt = |(\alpha,\beta)| \int_a^b |f(t)|dt. \end{aligned}$$

Dies angewendet auf das Kurvenintegral ergibt

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt \leq \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)| \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

□

10.11.2022

3.7 Definition. Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig mit $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann heißt $F : \Omega \to \mathbb{C}$ Stammfunktion von f, falls F komplex differenzierbar ist und $F' = f$.

3.8 Satz. *Sei F eine Stammfunktion von f auf Ω, und sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein stückweise C^1 Weg mit $\gamma(a) = z_1$ und $\gamma(b) = z_2$. Dann*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_2) - F(z_1),$$

d.h. das Kurvenintegral hängt nur von den Endpunkten ab.

Beweis.

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f \circ \gamma(t)\gamma'(t)dt = \int_a^b F' \circ \gamma(t)\gamma'(t)dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)dt.$$

□

Beispiel. Seien $\Omega = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $f(z) = z^k$ auf Ω mit $k \in \mathbb{Z}$, und $t \in [0, 2\pi] \mapsto \gamma(t) = e^{it}$. Wir berechnen das Kurvenintegral von f entlang des geschlossenen Weges γ. Falls $k \neq -1$, so hat f die Stammfunktion $F(z) = \frac{1}{k+1}z^{k+1}$. Nach dem vorigen Satz gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = \left[\frac{1}{k+1}z^{k+1}\right]_{\gamma(0)}^{\gamma(2\pi)} = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = 0.$$

Für $k = -1$ sehen wir erst, dass $\frac{1}{\gamma(t)} = e^{-it}$ und $\gamma'(t) = ie^{it}$. Somit

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} e^{-it}ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} dt = i2\pi.$$

Also hat z^{-1} auf $\Omega = \mathbb{C}^\times$ keine Stammfunktion.

3.9 Satz. *Sei $G \subset \Omega$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. *Für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [0, b] \to G$ gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

2. *Für je zwei Wege $\gamma_i : [a_i, b_i] \to G$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt gilt*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

3. *f hat eine Stammfunktion in G.*

Beweis. 2. $\Rightarrow$ 3. : Sei $z_0 \in G$ fest gewählt. Wir definieren $F : G \to \mathbb{C}$ wie folgt. Zu $z \in G$ wähle $\gamma_z : [a,b] \to G$ stückweise C^1 mit $\gamma_z(a) = z_0$ und $\gamma_z(b) = z$ und setze

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)dw.$$

Nach 2. hängt der Wert von $F(z)$ nicht von der Wahl des Weges γ_z ab. Für $h \in \mathbb{C}$ mit $z + h \in G$ betrachte

$$c : [0,1] \to G,\ c(t) = z + th.$$

Dann ist $\gamma_z * c : [a, b+1] \to G$ ein Weg von z_0 nach $z + h$. Also

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{\gamma_z * c} f(w)dw - \int_{\gamma_z} f(w)dw\right] = \frac{1}{h}\int_c f(w)dw = \int_0^1 f(z+th)dt$$

Nach Voraussetzung f ist stetig. Also existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $f(w) \in B_\epsilon(f(z)) \subset \mathbb{C}$ ($\Leftrightarrow |f(w) - f(z)| < \epsilon$) für alle $w \in B_\delta(z)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\limsup_{h\to 0}\left|f(z) - \frac{F(z+h) - F(z)}{h}\right| &= \limsup_{h\to 0}\left|\int_0^1 (f(z) - f(z+th))\,dt\right| \\ &\leq \limsup_{h\to 0}\int_0^1 |f(z) - f(z+th)|dt \leq \epsilon.\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt: $F'(z)$ existiert und $F'(z) = f(z)$.

3. $\Rightarrow$ 1. : Das folgt bereits aus dem Satz davor.

1. $\Rightarrow$ 2. : Betrachte $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2^-$. γ ist geschlossen. Also

$$0 = \int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2^-} f(z)dz.$$

$\square$

3.10 Satz (Lemma von Goursat)**.** *Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jedes kompakte Dreieck Δ in G*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Wenn Δ ein Dreieck mit Eckpunkten a, b, c ist, so kann der Rand $\partial\Delta$ durch die Verkettung $\gamma : [0,3] \to G$ der Wege $\sigma_{a,b}(t) = (1-t)a+tb$, $\sigma_{b,c}(t) = (1-t)b+tc$ und $\sigma_{c,a}(t) = (1-t)c+ta$ parametrisiert werden. Dabei können die Eckpunkt auch gleich sein.

Beweis. Die Länge des Randes $L(\partial\Delta)$ von Δ ist gegeben als die Summe $L(\sigma_{a,b})+L(\sigma_{b,c})+L(\sigma_{c,a})$. Wir zerlegen das Dreieck Δ in Teildreiecke, indem wir die Seitenmittelpunkte betrachten:

$$\sigma_{a,b}(\frac{1}{2}) = \frac{a+b}{2},\ \sigma_{b,c}(\frac{1}{2}) = \frac{b+c}{2},\ \sigma_{c,a}(\frac{1}{2}) = \frac{c+a}{2}.$$

Auf diese Weise erhalten wir vier Teildreiecke $\Delta^1, \ldots, \Delta^4$. Die Ränder dieser Teildreiecke können wir parametrisieren wie zuvor und es gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial\Delta^i} f(z)dz$$

da sich die Integrale der Innenseiten gerade wegheben.

Wir bezeichnen mit Δ_1 das Teildreieck Δ^i, für welches der Betrag des Kurvenintegrals am größten ist. Dann folgt

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \quad \& \quad L(\Delta_1) \leq \frac{1}{2}L(\Delta).$$

Durch Iteration dieses Vorgehens konstruieren wir eine Folge von Dreiecken $\Delta_k,\ k \in \mathbb{N}$, mit $\Delta \supset \Delta_1 \subset \Delta_2 \supset \dots$, so dass gilt

$$\left|\int_{\partial\Delta_k} f(z)dz\right| \geq 4^{-k}\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \quad \& \quad L(\Delta_k) \leq 2^{-k}L(\Delta).$$

Mit dem Intervalschachterlungsprinzip folgt, es gibt ein $z_0 \in \Delta \subset G$ mit $z_0 \in \Delta_k\ \forall k \in \mathbb{N}$. Wir setzen $L(\Delta_k) =: L_k$.

Nun hat die affine Funktion $z \in G \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ eine Stammfunktion, also gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\partial\Delta_k} \big(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\big)\, dz = 0.$$

Sei $g(z) = f(z) - (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))$. Für $z \in \Delta_k$ gilt $|z_0 - z| \leq L_k$. Dann folgt

$$\left|\int_{\partial\Delta_k} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta_k} g(z)dz\right| \leq L_k \max_{|z_0 - z| \leq L_k} |g(z)|.$$

Da f komplex differenzierbar ist in z_0 gilt $h(z) = \frac{|g(z)|}{|z - z_0|} \to 0$ falls $z \to z_0$. Insbesondere ist h stetig auf $B_r(z_0)$ für $r > 0$, so dass $B_r(z_0) \subset G$ und $h(z_0) = 0$. Also existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|h(w)| < \epsilon$ falls $|w - z_0| < \delta$.

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass $L_k = 2^{-k}L(\Delta) < \delta$. Dann folgt

$$\max_{|z - z_0| \leq L_k} |g(z)| = \max_{|z - z_0| \leq L_k} |z - z_0| h(z) \leq L_k \epsilon.$$

Somit folgt

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leq 4^k \left|\int_{\partial\Delta_k} f(z)dz\right| \leq 4^k L_k^2 \epsilon \leq \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

3.11 Satz (Lemma von Goursat, Verschärfung). *Sei $f : G \to \mathbb{C}$ steig und es gebe einen Punkte $a \in G$, so dass $f : G \backslash \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jedes kompakte Dreieck Δ in G, das einen Eckpunkt in a hat,*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Beweis. Der Satz wird aus dem eigentlichen Lemma von Goursat abgeleitet. Wir betrachten eine Zerlegung von Δ in Teildreieck $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4$, wobei Δ^1 den Punkt a enthält. Wir wählen diesmal die anderen Eckpunkte von Δ^1 beliebig nahe bei a. Wir können das Lemma von Goursat auf die Dreiecke Δ^2, Δ^3 und Δ^4 anwenden und somit verschwinden die entsprechenden Kurvenintegral. Es folgt deshalb

$$\left|\int_{\Delta} f(z)dz\right| = \left|\int_{\Delta^1} f(z)dz\right| \leq \max_{\Delta} |f| L(\partial\Delta^1).$$

Da wir $L(\partial\Delta^1)$ beliebig klein machen können, folgt der Satz. □

15.11.2022

3.12 Definition. Eine Menge $G \subset \mathbb{C}$ heißt sternförmig bzgl. $z_0 \in G$, wenn für alle $z \in G$ gilt:

$$\{(1-t)z_0 + tz : 0 \leq t \leq 1\} \subset G.$$

3.13 Satz (Integralsatz von Cauchy für Sterngebiete)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig bzgl. z_0, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und in $G \setminus \{z_0\}$ holomorph. Dann hat f auf G eine Stammfunktion. Insbesondere gilt für jeden geschlossenen Weg γ in G:*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Beweis. Wir wollen eine Stammfunktion durch Kurvenintegrale definieren. Sei $\gamma_z(t) = (1-t)z_0 + tz$. Setze $F : G \to \mathbb{C}$ mit

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\xi)d\xi = \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)(z - z_0)dt.$$

Sei nun $z \in G$ und $\epsilon > 0$ gegeben und $\delta > 0$ so klein, so dass $B_\delta(z) \subset G$ und $|f(z) - f(\widetilde{z})| < \epsilon$ falls $\widetilde{z} \in B_\delta(z)$. Dann folgt mit $h \in \mathbb{C}$, so dass $|h| < \delta$, aus dem (verschärften) Lemma von Goursat:

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_{z+h}} f(w)dw - \int_{\gamma_z} f(w)dw = \int_0^1 f(z+th)hdt.$$

Wir dividieren durch h. Das Integral auf der rechten Seit wird dann zu $\int_0^1 f(z+th)dt$. Da $|z - (z+th)| = t|h| < \delta$ folgt $|f(z+th) - f(z)| < \epsilon$. Deshalb folgt

$$\left| \int_0^1 f(z+th)dt - f(z) \right| = \left| \int_0^1 (f(z+th) - f(z))\, dt \right| \leq \epsilon \quad \text{für alle } h \in B_\delta(0).$$

Es folgt

$$\limsup_{h \to 0} \left| f(z) - \frac{F(z+h) - F(z)}{h} \right| \leq \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, folgt $F'(z)$ existiert und $F'(z) = f(z)$. □

3.14 Satz (Cauchy Integralformel)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jede Kreisscheibe $B_r(z_0)$, so dass $\overline{B_r(z_0)} \subset G$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} dw \text{ für alle } z \in B_r(z_0).$$

Bemerkung. Der Rand von $B_r(z_0)$ wird durch die Kurve $\gamma(t) = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$, parametrisiert, und wir verstehen das Integral über den Rand von $B_r(z_0)$ als das Kurvenintegral entlang γ. Unsere Notation ist gerechtfertigt, da das Kurvenintegral bis auf die Durchlaufrichtung nicht von der Parametrisierung abhängt. Die Durchlaufrichtung für die Parametrisierung des Randes eines Gebiets sei stets so gewählt, dass das Gebiet links von der Kurve liegt.

Wir beweisen zunächst das folgende Lemma.

3.15 Lemma (Differenzieren unter dem Integral)**.** *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein C^1 Kurve, und $f : U \times \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$, $f(z,w) = f(x,y,w)$, stetig, wobei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Wir können die Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ gegeben durch*

$$F(z) = \int_\gamma f(z,w)dw$$

betrachten. Es gelten folgende Aussagen:

1. *Die Funktion $F(z)$ ist stetig,*
2. *Falls die partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : U \times \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ definiert und stetig auf $U \times \gamma([a,b])$ sind, und falls $f(\cdot, w)$ für alle $w \in \gamma([a,b])$ holomorph ist auf U, so ist F holomorph auf U, und es gilt*

$$F'(z) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(z,w)dw.$$

Beweis. 1. F ist gegeben durch das Riemann Integral

$$\begin{aligned}
&F(z) = \int_a^b f(z,\gamma(t))\gamma'(t)dt =: G(z) + iH(z) \\
&+ \int_a^b \left[u \circ \gamma(t)(\alpha)'(t) - v \circ \gamma(t)(\beta)'(t)\right] dt + i \int_a^b \left[u \circ \gamma(t)(\beta)'(t) + v \circ \gamma(t)(\alpha)'(t)\right] dt.
\end{aligned}$$

Der Integrand dieses integrals hängt stetig von z ab. Also folgt aus dem Satz über die Stetigkeit parameterabhängige Integrale aus der Vorlesung Analysis 2, dass F stetig ist.

2. Unter den Voraussetzungen können wir gemäß entsprechender Aussagen aus der Analysis 2 die partiellen Ableitungen bzgl. x und y mit der Integration vertauschen:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,w)dw.$$

Explizit ist der Real- und der Imaginärteil von $\frac{\partial F}{\partial x}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) &= \int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,\gamma(t))(\alpha)'(t) - \frac{\partial v}{\partial x}(x,y,\gamma(t))(\beta)'(t)\right) dt \\
\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) &= \int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,\gamma(t))(\beta)'(t) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y,\gamma(t))(\alpha)'(t)\right) dt.
\end{aligned}$$

Entsprechend für die Ableitung nach y.

Da $f(\cdot, w)$ holomorph ist für jedes $w \in \gamma([a,b])$, folgen aus den Cauchy-Riemman Differentialgleichungen für f, die entsprechenden Differentialgleichungen für F. Außerdem, da $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig sind auf $U \times \gamma([a,b])$, folgt wie in Teil 1, dass die partiellen Ableitungen von F stetig sind. Damit ist F (total) reell differenzierbar und genügt den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen. Also ist F holomorph.

Es bleibt die Formel für F' zu zeigen. Es gilt $F'(z) = \frac{\partial G}{\partial x}(z) - i\frac{\partial G}{\partial y}(z)$ sowie $\frac{\partial f}{\partial z}(z,w) = \frac{\partial u}{\partial x}(z,w) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z,w)$. Also folgt mit den Cauchy-Riemann DGen

$$\begin{aligned} F'(z) = \int_a^b \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,\gamma(t))(\alpha)'(t) - \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,\gamma(t))}_{-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,\gamma(t))}(\beta)'(t)\Big)dt \\ - i\int_a^b \Big(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,\gamma(t))(\alpha)'(t) - \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}(x,y,\gamma(t))}_{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,\gamma(t))}(\beta)'(t)\Big)dt \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist in der Tat die explizite Formel für das Kurvenintegral $\int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(z,w)dw$. □

3.16 Lemma. *Es gilt*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{w-z}dw = \begin{cases} 1 & z \in B_r(z_0) \\ 0 & z \in \mathbb{C}\backslash\overline{B_r(z_0)}. \end{cases}$$

Beweis. Mit Differentiation unter dem Integral folgt

$$h'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{(w-z)^2}dw.$$

Der Integrand in diesem Integral hat nun einen Stammfunktion $-\frac{1}{w-z}$ bzgl. w. Also verschwindet das Kurvenintegral, und somit $h'(z) \equiv 0\ \forall z \in \mathbb{C}\backslash\partial B_r(z_0)$. Für $z_0 = z$ berechnen wir außerdem explizit

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{z_0 + re^{it} - z_0} = 1.$$

Also ist $h(z) = 1$ für alle $z \in B_r(z_0)$, weil $B_r(z_0)$ ein Gebiet ist.

Für $z \in \mathbb{C}\backslash\overline{B_r(z_0)}$ ist $\frac{1}{w-z}$ holomorph auf $B_r(z_0)$. Somit gilt nach dem Cauchy Integralsatz für sternförmige Gebiete, dass $h(z) = 0$. □

Beweis der Cauchy Integralformel. Betrachte die Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ mit

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z_0)}{w-z_0} & \text{für } w \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{für } w = z_0. \end{cases}$$

Da $\overline{B_r(z_0)} \subset G$, existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $B_{r+\epsilon}(z_0) \subset G$. g ist also stetig auf $B_{r+\epsilon}(z_0)$ und holomorph auf $B_{r+\epsilon}(z_0)\backslash\{z_0\}$. Nach dem Integralsatz von Cauchy folgt

$$0 = \int_{\partial B_r(z_0)} g(w)dw = \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)\underbrace{\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{w-z}dw}_{=2\pi i}.$$

□

17.11.2022

4 Anwendungen der Cauchy Integralformel

4.1 Lemma. *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^1$ stückweise C^1. Sind $f_n, f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ stetig und konvergiert f_n gleichmässig gegen f, dann folgt*

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz.$$

Beweis. Folgt aus der Aussage für Riemann Integrale aus der Vorlesung Analysis 2. □

4.2 Satz (Potenzreihendarstellung)**.** *Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $B_R(z_0) \subset G$, so dass $\overline{B_R(z_0)} \subset G$. Dann wird $f(z)$ auf $B_R(z_0)$ durch eine Potenzreihe dargestellt:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \quad \text{für } z \in B_R(z_0)$$

wobei die Koeffizienten gegeben sind durch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}dw.$$

Beweis. Für $z \in B_R(z_0)$ und $w \in \partial B_R(z_0)$ gilt

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k.$$

Für festes $z \in B_R(z_0)$ konvergiert die Reihe gleichmässig bzgl. $w \in \partial B_R(z)$, denn

$$\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} = \frac{|z-z_0|}{R} < 1.$$

Aus der Integralformel von Cauchy folgt deshalb

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k dw = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\int_{\partial B_R(z_0)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}dw$$

wobei wir wegen der gleichmässigen Konvergenz auf $\partial B_R(z_0)$ die Reihe und das Integral vertauschen dürfen. □

4.3 Folgerung. *Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist $f(z)$ auf G unendlich oft komplex differenzierbar. Für jedes $z_0 \in G$ gibt es die Darstellung*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \text{ für } z \in B_R(z_0)$$

wobei $R > 0$, so dass $B_R(z_0) \subset G$. Insbesondere $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial B_R(z_0)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}dw$.

Beweis. Nach dem vorigen Satz wird $f(z)$ auf $B_r(z_0)$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset G$ durch eine Potenzreihe dargestellt. Also ist f unendlich oft komplex differenzierbar auf $B_r(z_0)$, und die Koeffizienten der Potenzreihe sind durch die bekannten Taylorkoeffizienten gegeben. Genauer: Die n-Ableitung einer Potenzreihe auf ihrer Konvergenzscheibe ist die Potenzreihe

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k \left[k(k-1)\dots(k-n+1)\right](z-z_0)^{k-n} = f^{(n)}(z).$$

Mit $z = z_0$ folgt deshalb $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Da diese Formel nicht von r abhängt und $r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset G$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

4.4 Satz (Identitätssatz für Potenzreihe)**.** *Seien $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ Potenzreihen jeweils positivem KR. Sei $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $z_i \neq 0$ und $P(z_i) = Q(z_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sein R_1 und R_2 die beiden Konvergenzradien, $R = \min\{R_1, \mathbb{R}_1\} := R_1 \wedge R_2$ und ohne Einschränkung sei $|z_i| < R \ \forall i \in \mathbb{N}$ (da (z_i) eine Nullfolge).

Durch Substraction der beiden Reihen von einander können wir o. E. annehmen, dass $b_n = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$. Dann ist zu zeigen, dass $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Wir führen den Beweis durch Induktion bzgl. $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang $n = 0$: Es gilt $a_0 = \lim_{i\to\infty} P(z_i) = \lim_{i\to\infty} Q(z_i) = 0$.

Induktionschritt: Induktiv sei bereits gezeigt, dass $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$. Dann gilt

$$0 = Q(z_i) = P(z_i) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z_i^k = z_i^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} z_i^k \;\Rightarrow\; 0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} z_i^k \to a_n \quad \text{falls } i \to \infty.$$

Also auch $a_n = 0$. □

4.5 Folgerung (Identitätssatz)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Es gelte*

(a) $f(z_i) = g(z_i)$ für eine Folge $(z_i) \to z_0$ in G mit $z_i \neq z_0 \ \forall i \in \mathbb{N}$, d.h. die Menge $\{z \in G : f(z) = g(z)\}$ hat den Häufungspunkt $z_0 \in G$, oder

(b) $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für ein $z_0 \in G$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann folgt $f \equiv g$.

Beweis. (a) f und g werden auf dem Ball $B_r(z_0)$ für ein $r > 0$ durch eine Potenzreihe dargestellt. Laut dem Identitätssatz für Potenzreihen deshalb $f(z) = g(z) \ \forall z \in B_r(z_0)$.

Sei nun A die Menge aller Häufungspunkte von $\{z \in G : f(z) = g(z)\}$ in G. Mit dem eben Gezeigten folgt, dass A offen ist. Andererseits ist A abgeschlossen, denn $A \subset \{z \in G : f(z) = g(z)\}$, da f und g stetig sind. Also ist jeder Grenzwert aus Punkten in A, bereits ein Häufungspunkt von $\{z \in G : f(z) = g(z)\}$ und A deshalb abgeschlossen. Außerdem ist $z_0 \in A$ also $A \neq \emptyset$.

Es folgt A ist eine offene, abgeschlossene, nichtleere Menge im Gebiet G, also gilt $A = G$.

(b) Aus der Potenzreihedarstellung von f und g folgt, dass $f(z) = g(z)$ auf einem Ball $B_r(z_0)$. Wir definieren nun $B = \{z \in G : f^{(n)}(z) = g^{(n)}(z)\}$. Aus dem eben gezeigten folgt wieder, dass B offen ist. Andererseits ist B auch abgeschlossen und $z_0 \in B$. Wie in (a) folgt also $B = G$, da G ein Gebiet.

$\square$

4.6 Lemma. *Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $B_R(z_0)$, so dass $\overline{B_R(z_0)} \subset G$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

für $z \in B_R(z_0)$.

Beweis. Wir beweise das Lemma durch Induktion. Für $n = 0$ ist die Aussage gegeben durch die Integralformel von Cauchy.

Nun nehmen wir an, die Formel ist bereits richtig für $n-1$. Wir betrachten die Funktion

$$\varphi : B_R(z_0) \times \partial B_R(z_0) \to \mathbb{C}, \quad \varphi(z, \xi) = \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^{n+1}}.$$

Es gilt bereits

$$f^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+2}} d\xi = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \varphi(z, \xi) d\xi.$$

Außerdem ist φ stetig,und stetig partiell differenzierbar in x und y, wobei $z = x + iy \in B_R(z_0)$. Also können wir Differentation und Integration vertauschen und wir erhalten die gewünschte Formel. $\square$

22.11.2022

Bemerkung (Zum Identitätssatz).

1. Holomorphe Funktionen auf einem Gebiet G sind bereits durch ihre Werte auf "sehr dünnen" Teilmengen vollständig bestimmt, z.B. durch die Werte auf der Spur einer Kurve in G.

2. Die Voraussetzung, dass G ein Gebiet und damit zusammenhängend ist, ist für die Gültigkeit des Satzes wesentlich, denn ist G die Vereinigung zweier disjunkter Kreisscheiben $B_1(z_0)$ und $B_1(z_1)$, und ist $f \equiv 0$ in G, und $g \equiv 0$ in $B_1(z_0)$ aber $g \equiv 1$ in $B_1(z_1)$, so sind f und g holomorph in G, erfüllen die Voraussetzung des Satzes, aber $f \neq g$ in G.

4.7 Satz. *Sei $f : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Zu jedem $z \in \partial B_R(z_0)$ gebe es $f^z : U^z \to \mathbb{C}$ holomorph mit U^z eine offene Umgebung von z, so dass $f^z = f$ auf $B_R(z_0) \cap U^z$. Dann ist f auf eine größere Kreisscheibe $B_{R'}(z_0)$, $R' > R$, holomorph fortsetzbar.*

Beweis. Wir können annehmen, dass U^z eine Kreisscheibe $B_{\rho(z)}(z)$ um z mit Radius $\rho(z) > 0$ ist. Wir definieren eine holomorphe Fortsetzung $\widetilde{f} : U \to \mathbb{C}$, wobei $U = B_R(z_0) \cup \bigcup_{z \in \partial B_R(z_0)} U^z$ und

$$\widetilde{f}(w) = \begin{cases} f(w) & w \in B_R(z_0) \\ f^z(w) & w \in U^z \end{cases}$$

Zeige: $\widetilde{f}$ is wohldefiniert.

Zunächst gilt, dass $f^z = f$ auf $B_R(z_0) \cap U^z$ $\forall z \in\in \partial B_R(z_0)$. Also ist $\widetilde{f}$ wohldefiniert in $B_r(z_0)$.

Falls nun $z_1, z_2 \in \partial B_R(z_0)$ mit $z_0 \neq z_1$ und $U^{z_1} \cap U^{z_2} \neq \emptyset$. Da U^z als Kreisscheiben angenommen waren, ist $V = B_R(z_0) \cap U^{z_1} \cap U^{z_0} \neq \emptyset$, denn die Strecke zwischen z_1 und z_2 liegt vollständig in $B_R(z_0)$ aber schneidet auch $U^{z_1} \cap U^{z_2}$. Auf gilt $f^{z_1} = f^{z_2} = f$ und V enthält Häufungspunkte. Also folgt aus dem Identitätssatz, dass $f^{z_1} \equiv f^{z_2}$ auf $U^{z_1} \cap U^{z_2}$. Also ist $\widetilde{f}$ wohldefiniert und eine Fortsetzung von f. □

4.8 Satz (Abschätzungen von Cauchy)**.** *Sei $f : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}_0$*

$$\frac{\left|f^{(n)}(z_0)\right|}{n!} \leq MR^{-n} \textit{ mit } M = \limsup_{z \to \partial B_R(z_0)} |f(z)|.$$

Beweis. Sei $r \in (0, R)$. Dann folgt aus dem Lemma 4.6

$$\frac{\left|f^{(n)}(z_0)\right|}{n!} \leq \frac{1}{2\pi} L(\partial B_r(z_0)) \sup_{\partial B_r(z_0)} |f| r^{-(n+1)} = r^{-n} \sup_{\partial B_r(z_0)} |f|.$$

Dann

$$\frac{\left|f^{(n)}(z_0)\right|}{n!} \leq r^{-n} \max_{\partial B_r(z_0)} |f| \to R^{-n} M \text{ falls } r \uparrow R.$$

□

4.9 Folgerung (Satz von Liouville)**.** *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein ganze Funktion, also auf ganz $\mathbb{C}$ definiert und holomorph. Falls f beschränkt ist, so ist f konstant.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein $M \in [0,\infty)$, so dass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus der Cauchy Abschätzung für $n = 1$ folgt

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R} \to 0 \text{ mit } R \to \infty$$

Also ist $f' \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$ zshg. und f ist somit konstant. $\square$

4.10 Folgerung (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes Polynom $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $n \geq 1$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Es gilt nach der Dreiecksungleichung für $n \geq 1$

$$\begin{aligned}|p(z)| \geq& |z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \cdots - |a_1||z| - |a_0| \\ =& |z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n}\right) \geq \frac{1}{2}|z|^n \quad \text{falls } |z| \text{ hinreichend groß.}\end{aligned}$$

Hätte p nun keine Nullstelle in $\mathbb{C}$, so wäre $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ auf $\mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, da stets $f(z) \to 0$ mit $z \to \infty$. Nach Liouville ist $f(z)$ konstant, also identisch 0. Widerspruch zu $n \geq 1$. $\square$

4.11 Lemma (Satz von Morera)**.** *Sei $f : G \to \mathbb{C}$ stetig, G offen. Gilt für jedes Dreieck $\Delta \subset\subset G$*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0,$$

so ist f holomorph in G.

Bemerkung. Das Lemma ist die Umkehrung des Lemmas von Goursat, bis auf die Bedingung der Stetigkeit von f.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass f auf jedem Ball $B_r(z_0)$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset G$ holomorph ist. Dazu definieren wir die Funktion

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)dw = \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)(z - z_0)dt$$

auf $B_r(z_0)$. Wie im Cauchyintegralsatz für sternförmige Gebiete folgt $F'(z) = f(z)$. Also ist die Funktion F holomorph und damit auch ihre Ableitung $F' = f$. $\square$

4.12 Folgerung (Holomorphiekriterien)**.** *Für $f : G \to \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist holomorph,*
2. *f besitzt um jeden Punkt $z_0 \in G$ eine Darstellung als Potenzreihe,*
3. *f besitzt lokal eine Stammfunktion,*
4. *f ist stetig und für jedes Dreieck $\Delta \subset G$ gilt $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.*

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2. : Dies ist die Aussage von Satz 4.2 (Potenzreihendarstellung).

2. $\Rightarrow$ 3. : Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ auf $B_r(z_0)$. Dann haben wir die Stammfunktion

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k}(z-z_0)^k.$$

Aus der Formel von Cauchy-Hadamard zur Berechnung des Konvergenzradius folgt, dass die Reihe $F(z)$ den selben Konvergenzradius $R \geq r$ hat wie f. Außerdem gilt $F'(z) = f(z)$ auf $B_r(z_0)$, da wir gliedweise differenzieren dürfen.

3. $\Rightarrow$ 4. : Für jedes $z_0 \in G$ existiert $B_r(z_0)$ und eine holomorphe Funktion F auf $B_r(z_0)$, so dass $F' = f$ auf $B_r(z_0)$. Wieder aus Satz 4.2, diesmal angewendet auf F, folgt, dass F unendlich oft komplex differenzierbar ist auf $B_r(z_0)$, und damit auch f. Somit ist f holomorph in G. Also folgt aus dem Lemma von Goursat die Aussage.

4. $\Rightarrow$ 1.: Dies ist die Aussage des Satzes von Morera. $\square$

24.11.2022

4.13 Satz (Konvergenzsatz von Weierstraß)**.** *Seien $f_k : G \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, holomorph und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert lokal gleichmäßig auf G gegen $f : G \to \mathbb{C}$. Dann ist f auf G holomorph, und alle Ableitungen $f_k^{(n)}$ konvergieren ebenfalls lokal gleichmäßig gegen $f^{(n)}$.*

Beweis. 1. Sei Δ ein beliebiges Dreieck in G. Da alle f_k holomorph folgt aus dem Lemma von Goursat

$$\int_{\partial\Delta} f_k(z)dz = 0.$$

Lokal gleichäßige Konvergenz der f_k impliziert gleichmäßige Konvergen von f_k auf der kompakten Teilmenge Δ gegen f. Wir können also den Grenzwert mit der Integration vertauschen. Somit ist

$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0$$

und der Satz von Morera liefert, dass f holomorph ist.
2. Sei $B_{2r}(z_0) \subset G$ mit $\overline{B_{2r}(z_0)} \subset G$ und $\epsilon > 0$. Dann gilt wegen lokal gleichmäßiger Konvergenz: es gibt $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sup_{z\in\overline{B_{2r}(z_0)}} |f^{(k)}(z) - f^{(l)}(z)| < \epsilon \text{ für alle } k, l \geq n_\epsilon.$$

Sei $z \in \overline{B_r(z_0)}$. Somit $\overline{B_r(z)} \subset \overline{B_{2r}(z_0)}$. Wende auf $B_r(z)$ die Cauchy Abschätzungen an für $f_k - f_l$:

$$|f_k^{(n)}(z) - f_l^{(n)}(z)| \leq n! R^{-n}\epsilon \text{ für } k, l \geq n_\epsilon.$$

Also konvergieren die $f_k^{(n)}$ auf $\overline{B_r(z_0)}$ gleichmäßig gegen Funktionen g_n.

In der Integralformel für die Ableitungen auf $B_r(z_0)$ in Lemma 4.6 können wir nun wieder den Grenzwert mit der Integration vertauschen. Also folgt $g_n(z) = f^{(n)}(z)$. □

4.14 Definition. Eine Reihe $\sum_{k=0}^\infty f_k$ von Funktionen $f_k : G \to \mathbb{C}$ heißt normal konvergent, falls auf jeder kompakten Menge $K \subset G$ gilt:

$$\sum_{k=0}^\infty \|f_k\|_{C^0(K)} < \infty.$$

Äquivalent dazu ist: jedes $z \in G$ hat Umgebung U mit $\sum_{k=0}^\infty \|f_k\|_{C^0(U)} < \infty$.

4.15 Folgerung. *Sind die Funktionen $f_k : G \to \mathbb{C}$ holomorph und ist die zugehörige Reihe normal konvergent auf G, so konvergiert diese Reihe von Funktionen mit allen Ableitungen lokal gleichmässig gegen eine holomorphe Funktion.*

4.16 Satz (Riemann'scher Hebbarkeitssatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$ und $f : \Omega\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Folgende Aussagen über f sind äquivalent.*

1. *f is holomorph auf Ω fortsetzbar.*
2. *f ist stetig auf Ω fortsetzbar.*
3. *f ist in einer Umgebung $U \subset \Omega$ um den Punkt z_0 beschränkt.*

4. Es gilt $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$.

Beweis. Die Implikationen 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 4. sind klar.

Es bleibt zu zeigen 4. $\Rightarrow$ 1. Dazu sei ohne Einschränkung $z_0=0$ und wir betrachten wir die Funktionen

$$g(z) := \begin{cases} zf(z) & \text{für } z \in \Omega\backslash\{z_0\} \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

und $h(z) := zg(z)$, $z \in \Omega$. g ist nach 4. stetig in 0. Wegen $\frac{h(z)-h(0)}{z} = \frac{h(z)}{z} = g(z)$ ist h somit komplex differenzierbar in 0 mit $h'(0)=g(0)$. Da f bereits holomorph in $\Omega\backslash\{0\}$ folgt dies auch für h, und deshalb ist h holomorph in Ω. Also gibt es eine Potenzreihendarstellung von h um 0

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Da $h(0)=0$ sowie $h'(0)=g(0)=0$, gilt $a_0=a_1=0$. Somit gilt $h(z)=z^2\left(\sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k\right)$ für alle z in einem Ball um 0.

Gleichzeitig gilt für $z \neq 0$, dass $h(z)=z^2 f(z)$. Also ist die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_2 z^k$$

eine holomorphe Fortsetzung von f auf eine Umgebung von 0. $\square$

4.17 Definition. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(z_0)=w_0$. Die Ordnung oder auch Vielfachheit von f in z_0 ist

$$k = \min\{j \in \mathbb{N} : f^{(j)}(z_0) \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Dann heißt z_0 k-fache w_0-Stelle von f.

Im Fall $k=\infty$ verschwindet also die Potenzreihe um z_0 und $f(z)$ ist auf der Zusammenhangskomponente von $z_0 \in G$ konstant gleich w_0 nach dem Identitätssatz.

4.18 Lemma. *Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, und $z_0 \in G$ sei eine k-fache Nullstelle von f mit $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $\varphi : U \to B_r(0)$ bi-holomorph mit $U \subset \mathbb{C}$ offene Umgebung von z_0 und $r > 0$, so dass $f(z) = \varphi(z)^k$ für alle $z \in U$.*

Beweis. Laut Satz 4.2 hat die Potenzreihe um z_0 die Form

$$f(z) = \sum_{j=k}^{\infty} a_j (z-z_0)^j =: a_k (z-z_0)^k g(z).$$

Die Funktion g ist dabei auf einer Umgebung U von z_0 holomorph mit $g(z_0)=1$.

Die Abbildung $w \mapsto w^k$ ist holomorph und bildet den Sektor $\{re^{i\theta} : r > 0, \theta \in (-\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{k})\}$ biholomorph auf $\mathbb{C}^-$ ab. Als existiert eine holomorphe Umkehrabbildung, die wir mit $w \mapsto w^{\frac{1}{k}}$ bezeichnen, eine k-te Wurzel auf $\mathbb{C}^-$. Nach Verkleinerung von U können wir annehmen, dass $g(U) \subset \mathbb{C}^-$. Somit ist es möglich die folgende Funktion $\varphi : U \to \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(z) = \alpha(z-z_0)g(z)^{\frac{1}{k}}$$

zu definieren. Dabei sei $\alpha \in \mathbb{C}$, so dass $\alpha^k = a_k \neq 0$ (z.B. falls $a_k = re^{i\eta}$, $r > 0$, dann sei $\alpha = r^{\frac{1}{k}} e^{i\frac{\eta}{k}}$). φ ist holomorph nach Definition und $\varphi'(z_0) = \alpha g(z_0)^{\frac{1}{k}} = \alpha \neq 0$. Nachdem wir die Umgebung U evtl weiter verkleinert haben, ist $\varphi : U \to B_r(0)$ ist biholomorph. Es folgt $f(z) = a_k(z - z_0)^k g(z) = \varphi(z)^k$. □

4.19 Satz (von der Gebietstreue)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, so ist $f(G)$ wieder ein Gebiet.*

Beweis. Sei $w_0 = f(z_0)$ mit Vielfachheit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wäre $k = \infty$, so wäre f bereits konstant auf G nach dem Identitätssatz.

Ist $k < \infty$, dann gilt $f(z) = \varphi(z)^k$ für eine biholomorphe Funktion φ auf einer Umbegung U um z_0, so dass $\varphi(U) = B_r(\varphi(z_0))$. Dann folgt aber, dass $f(U) = B_{r^k}(w_0)$. Das Bild $f(G)$ ist also offen.

Der Zusammenhang von $f(G)$ folgt aus dem topologischen Zwischenwertsatz (das stetige Bild einer zusammenhängenden Menge ist zusammenhängend). □

29.11.2022

4.20 Satz (Starkes Maximumsprinzip)**.** *Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Falls ein $z_0 \in G$ mit $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in G$ existiert, so ist f konstant.*

Beweis. Der Punkt $f(z_0)$ ist ein Randpunkt von $f(G)$. Also ist f konstant nach dem Satz von der Gebietstreue. □

4.21 Folgerung (Schwaches Maximumprinzip)**.** *Sei G ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig, nicht konstant, und in G holomorph. Dann folgt*

$$\sup_{z \in G} |f(z)| \leq \sup_{z \in \partial G} |f(z)|.$$

Beweis. Angenommen $\exists z_0 \in G$, so dass $|f(z_0)| \geq |f(z)|\ \forall z \in G$. Dann folgt aus dem starken Maximumprinzip, dass f konstant ist. In jedem Fall folgt die Behauptung. □

4.22 Satz (Schwarz'sches Lemma)**.** *Sei $f : B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \to B_1(0)$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt $|f(z)| \leq |z|\ \forall z \in B_1(0)$ and $|f'(0)| \leq 1$. Gilt $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in B_1(0)$ oder gilt $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung, d.h. $\exists c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$, so dass $f(z) = c \cdot z$.*

Beweis. f hat eine Potenzreihendarstellung um 0 gegeben durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k = z \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1} =: zg(z)$$

für eine holomorphe Funktion $g : B_1(0) \to B_1(0)$. Aus der Produktregel folgt $f'(0) = g(0)$. Für $z \in B_1(0)$ mit $|z| = r$ gilt

$$1 > |f(z)| = |z||g(z)| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} > |g(z)|.$$

Nach dem schwachen Maximumprinzip gilt $\max_{\overline{B_r(0)}} |g| = \max_{\partial B_r(0)} |g|$. Somit folgt $\frac{1}{r} > |g(z)|\ \forall z \in B_r(0)$. Wenn $r \to 1$, so folgt $|g(z)| \leq 1\ \forall z \in B_1(0)$. Also auch $|f(z)| \leq |z|$ und $f'(0) \leq 1$.

Falls in einer Ungleichungen eine Gleichheit gilt, so gibt es $z \in B_1(0)$ mit $|g(z)| = 1$. Nach dem starken Maximumprinzip folgt dann aber, dass $g(z) = c = const.$ Also ist $f(z) = c \cdot z$. □

5 Isolierte Singularitäten

5.1 Definition. Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$ und $f : \Omega \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, so heißt z_0 eine isolierte Singularität von f.

Man unterscheidet drei Typen von isolierten Singularitäten:

1. z_0 heißt hebbare Singularität, wenn sich f durch geignete Festsetzung von $f(z_0)$ zu einer holomorphen Funktion fortsetzen läßt.

2. z_0 heißt Pol von f, wenn z_0 nicht hebbar ist, aber $\exists m \in \mathbb{N}$, so dass $(z - z_0)^m f(z)$ eine hebbare Singulrität bei z_0 hat. Das kleinste solche m heißt dei Ordnung des Poles.

3. Ist die isolierte Singularität z_0 von f weder hebbar noch ein Pol, so heißt z_0 wesentlich.

Beispiel. Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $f(z_0) \neq 0$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann hat $\frac{f(z)}{(z-z_0)^m}$ einen Pol der Ordnung m in z_0.

Bemerkung. Umgekehrt: falls $g : \Omega \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$, holomorph, einen Pol $m$ter Ordnung in z_0 hat, so gibt es eine holomorphe Funktion f auf Ω mit $f(z_0) \neq 0$ und $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^m}$, denn $(z-z_0)^m g(z)$ ist nach Voraussetzung holomorph fortsetzbar. Wäre $f(z_0) = 0$, so wäre nach dem Potenzreihenentwicklungssatz $(z-z_0)^{m-1} g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)}$ noch holomorph in z_0 fortsetzbar und die Ordnung somit $m-1 < m$.

5.2 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ bis auf Pole holomorph, so heißt f meromorph in Ω. Genauer: Ist f meromorph in Ω und bezeichnet D_f die Menge der Pole von f in Ω, so verlangen wir, dass $\Omega \backslash D_f$ offen und $f : \Omega \backslash D_f \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Die Menge der Nullstellen von f bezeichnen wir mit N_f.

Beispiel. Rationale Funktionen $\frac{p}{q}$ sind meromorph in $\mathbb{C}$, wobei p und q Polynome.

Bemerkung. Die meromorphen Funktionen sind Funktionen, die sich lokal als Quotient holomorpher Funktionen darstellen lassen.

Sind g, h auf einem Gebiet G holomorph, und h ist nicht konstant 0, so ist $f(z)$ die durch $\frac{g(z)}{h(z)}$ nach Hebung aller hebbaren Singularitäten entsteht eine meromorphe Funktion.

Beweis. Sei $z_0 \in G$. Ist $h(z_0) \neq 0$, so ist f komplex differenzierbar bei z_0. Ist $h(z_0) = 0$ und $m \in \mathbb{N}$ die Ordnung der NS z_0, so folgt aus der Reihenentwicklung von h bei z_0, dass lokal um z_0

$$h(z) = (z-z_0)^m \widetilde{h}(z)$$

für eine holomorphe Funktion $\widetilde{h}$ mit $\widetilde{h}(z_0) \neq 0$. Nachdem wir g duch $g - g(z_0)$ ersetzen, gilt analog

$$g(z) = (z-z_0)^n \widetilde{g}(z)$$

wobei n die Ordnung von g in z_0 und $\widetilde{g}(z_0) \neq 0$. Also folgt

$$f(z) = (z-z_0)^{n-m} \frac{\widetilde{g}(z)}{\widetilde{h}(z)}.$$

Somit ist z_0 entweder ein Pol von f $(k < m)$ oder f ist bei z_0 definiert mit Ordnung $k \geq n$ und komplex differenzierbar. □

5.3 Lemma. *Sei G ein Gebiet und f meromorph in G, nicht konstant* 0. *Dann kann weder D_f noch N_f einen Häufungspunkt in Ω haben. D_f und N_f sind also diskret in G.*

Beweis. Zunächst kann ein Pol $z_0 \in G$, als isolierte Singularität, nicht Häufungspunkt von Polen sein. Für ein HP z von Polen, muss nun gelten $z \notin G$. Sonst wäre G ohne die Pole von f nicht offen.

Die Menge D_f der Pole von f in G ist also diskret. $G \backslash D_f$ ist somit auch ein Gebiet, insbesondere zshg. Hätten die Nullstellen von f einen HP in $G \backslash D_f$, so wäre f nach dem Identitätssatz konstant gleich 0. □

Bemerkung. Falls f auf einem Gebiet G meromorph ist, so ist $\frac{1}{f} : G \backslash (D_f \cup N_f) \to \mathbb{C}$ holomorph, mit Polen in N_f und hebbaren Singularitäten in D_f.

Beispiel (für eine wesentliche Singularität). Die auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ definierte Funktion $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ hat bei 0 eine wesentliche Singularität, denn die Nullstellen häufen sich bei $0 \notin \mathbb{C}\backslash\{0\}$

Wir wollen das Verhalten meromorpher Funktionen an den Polen untersuchen.

5.4 Definition. Die erweiterte komplexe Zahlenebene ist $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}}$, die Riemann'sche Zahlenkugel. Konvergenz von $z_k \in \hat{\mathbb{C}} \to z \in \hat{\mathbb{C}}$ ist wie folgt definiert.

1. Falls $z \in \mathbb{C}$, dann $z_k \in \hat{\mathbb{C}} \to z$, wenn $\forall \epsilon > 0\ \exists k_\epsilon \in \mathbb{N}$ so dass $z_k \in \mathbb{C}$ and $|z_k - z| < \epsilon$ $\forall k \geq k_\epsilon$.
2. Falls $z = \infty$, dann $z_k \in \hat{\mathbb{C}} \to z$, wenn $\forall \epsilon > 0\ \exists k_\epsilon \in \mathbb{N}$ so dass $z_k = \infty$ oder $|z_k| \geq M$ $\forall k \geq k_\epsilon$.

Die offenen Umgebungen um einen Punkt $z \in \hat{\mathbb{C}} \cap \mathbb{C}$ sind die selben wie in $\mathbb{C}$, z.B. $B_r(z)$. Für $z = \infty$ sind die offenen Umgebungen in $\hat{\mathbb{C}}$ die Komplemente von kompakten Mengen in $\mathbb{C}$, z.B. $\mathbb{C}\backslash\overline{B_r(w)}$ mit $w \in \mathbb{C}$. Eine Menge $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ ist offen, wenn jeder Punkt in U eine Umgebung besitzt, die in U enthalten ist.

Beispiel. Sei $f = \frac{p}{q}$ mit $p(z) = \sum_i^m a_i z^i$ und $q(z) = \sum_{j=1}^n b_j z^j$ ohne gemeinsame Nullstellen. Dann ist f meromorph in $\mathbb{C}$. Ist λ eine Nullstelle der Ordnung k von q, so gilt $q(z) = (z-\lambda)^k \widetilde{q}(z)$ mit $\widetilde{q}(\lambda) \neq 0$. Wegen $p(\lambda) \neq 0$ folgt

$$|f(z)| = |z - \lambda|^{-k} \frac{|p(z)|}{|\widetilde{q}(z)|} \to \infty \text{ falls } z \to \lambda.$$

Setzen wir $\hat{f}(\lambda) = \infty$, so haben wir eine stetige Fortsetzung $\hat{f} : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ von f.

Außerdem gilt

$$f(z) = z^{m-n} \frac{a_m + a_{m-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-m}}{b_n + b_{n-1} z^{-1} + \cdots + b_0 z^{-n}} \to \begin{cases} \infty & \text{falls } m > n \\ \frac{a_m}{b_n} & \text{falls } m = n \\ 0 & \text{falls } m < n \end{cases} \quad \text{für } z \to \infty.$$

Damit ist eine rationale Funktion f sogar stetig fortsetzbar als Abbildung $\hat{f} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$.

01.12.2022

5.5 Definition. 1. Sei f meromorph in Ω mit einer Polstelle $\lambda \in \Omega$. f heißt komplex differenzierbar in λ, falls

$$g : B_\epsilon(\lambda) \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{falls } z \neq \lambda \\ 0 & \text{falls } z = \lambda. \end{cases}$$

komplex differenzierbar ist in λ mit $B_\epsilon(\lambda) \subset \Omega$, so dass $B_\epsilon(\lambda) \cap N_f = \emptyset$.

2. Sei $f : \mathbb{C}\backslash\overline{B_R(0)} \to \mathbb{C}$ für ein $R > 0$ mit $\lim_{z\to\infty} f(z) = a \in \hat{\mathbb{C}}$. f heißt in ∞ komplex differenzierbar falls die folgende Funktion g in 0 komplex differenzierbar ist:

$$\text{falls } a \in \mathbb{C}: \; g(z) = \begin{cases} f(\frac{1}{z}) & z \neq 0 \\ a & z = 0 \end{cases} \text{ oder, falls } a = \infty: \; g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(\frac{1}{z})} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0. \end{cases}$$

5.6 Lemma. *Die Fortsetzung einer rationale Funktion $f = \frac{p}{q}$ auf $\hat{\mathbb{C}}$ ist komplex differenzierbar für alle $z \in \hat{\mathbb{C}}$.*

Beweis. Ohne Einschränkung haben $p(z) = \sum_{i=1}^m a_i z^i$ und $q(z) = \sum_{j=1}^n b_j z^j$ keine gemeinsamen Nullstellen.

Sei $\lambda \in D_f$ ein Pol der Ordnung k. Dann ist $f(z)(z-\lambda)^k = h(z)$ holomorph fortsetzbar mit $h(\lambda) = 0$ (sonst wäre die Ordnung $< k$). Also ist $g(z) = \frac{1}{f(z)} = (z-\lambda)^k \frac{1}{h(z)}$ holomorph in einer Umgebung von λ (mit $g(\lambda) = 0$).

Ist $m \leq n$, dann gilt $f(\frac{1}{z}) \to \begin{cases} \frac{a_m}{b_n} & \text{falls } m = n \\ 0 & \text{falls } m < n. \end{cases}$ Also ist $f(\frac{1}{z})$ stetig fortsetzbar in 0 und nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz komplex differenzierbar in 0.

Ist $m > n$, dann gilt $g(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})} \to 0$ für $z \to 0$. Also ist g stetig fortsetzbar in 0 und wegen dem Hebbarkeitssatz komplex differenzierbar in 0. □

Ziel: Eine Verallgemeinerung des Potenzreihenentwicklungssatzes für $f : G\backslash S \to \mathbb{C}$ holomorph, wobei S isolierte Singularitäten von f in G (z.B. für f meromorph in G).

5.7 Satz (Zerlegung in Haupt- und Nebenteil)**.** *Sei $f : A_{r,R}(a) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\} = B_R(0)\backslash\overline{B_r(a)} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $r < R$ und $r, R \in [0, \infty]$. Dann gibt es eindeutig bestimmte holomorphe Funktionen $f_0 : A_{r,\infty}(a) \to \mathbb{C}$ und $f_1 : B_R(a) \to \mathbb{C}$, so dass $f = f_0 + f_1$ auf $A_{r,R}(a)$ und $\lim_{z\to\infty} f_0(z) = 0$.*

Beweis. **1.** Eindeutigkeit. Falls $f_0, \widetilde{f_0}, f_1$ und $\widetilde{f_1}$ existieren, so dass $f = f_0 + f_1$ und $f = \widetilde{f_0} + \widetilde{f_1}$ auf $A_{r,R}(a)$, dann folgt

$$f_0 - \widetilde{f_0} + f_1 - \widetilde{f_1} = 0 \text{ auf } A_{r,R}(a).$$

Dann sind $g_0 = f_0 - \widetilde{f_0}$ und $g_1 = f_1 - \widetilde{f_1}$ wie in der Behauptung. Definiere dann $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = \begin{cases} -g_1(z) & |z| < R \\ g_0(z) & |z| > r. \end{cases}$ Da $-g_1 = g_0$ auf $A_{r,R}(a)$ ist g wohldefiniert und holomorph auf $\mathbb{C}$, so dass $g(z) \to 0$ für $z \to \infty$. Also folgt mit dem Satz von Liouville, dass $g \equiv 0$.

2. Existenz. Wir beweisen zunächst das folgende

5.8 Lemma. *Sei $f : A_{r,R}(a) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für $r < \sigma < \rho < R$:*

$$\int_{\partial B_\sigma(a)} f(w)dw = \int_{\partial B_\rho(a)} f(w)dw.$$

Beweis des Lemmas. Betrachte $\Phi : (\ln r, \ln R) \times \mathbb{R} \to A_{r,R}(a)$ mit $\Phi(w) = a + e^w$. Aus dem Transformationssatz für Kurvenintegrale folgt

$$\int_{\partial B_\rho(a)} f(w)dw = \int_{\ln\rho \times [0,2\pi]} f(\Phi(w))\Phi'(w)dw.$$

Die Funktion $g(w) = f \circ \Phi(w)\Phi'(w)$ ist auf $(\ln r, \ln R) \times \mathbb{R}$ holomorph und $(\ln r, \ln R) \times \mathbb{R}$ ist sternförming. Mit dem Cauchy Integralsatz folgt

$$\int_{\partial Q} g(z)dz = 0 \quad \text{wobei } Q = [\ln\sigma, \ln\rho] \times [0, 2\pi].$$

Insbesondere parametrisieren wir die Kanten $[\ln\sigma, \ln\rho] \times \{2\pi\}$ und $[\ln\sigma, \ln\rho] \times \{0\}$ durch $\gamma_1(t) = ((1-t)\ln\sigma + t\ln\rho, 2\pi)$ und $\gamma_2(t) = ((1-t)\ln\rho + t\ln\sigma, 0)$.

Aber wegen der Periodizität von Φ, das ist $\Phi(w) = \Phi(w + 2\pi)$, folgt $\Phi \circ \gamma_1 = \Phi \circ \gamma_2^-$. Also gilt

$$\int_{\gamma_1} g(w)dw = -\int_{\gamma_2} g(w)dw.$$

Also folgt aus der Transformationsformel die Behauptung. □

5.9 Lemma. *Sei $f : A_{r,R}(a) \to \mathbb{C}$ holomorph, $z \in A_{r,R}(a)$. Dann gilt für $r < \sigma < |z| < \rho < R$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z}dw - \int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w-z}dw\right).$$

Beweis des Lemmas. Betrachte

$$g : A_{r,R}(a) \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \neq z, \\ f'(w) & w = z \end{cases}$$

is holomorph (wegen dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz). Mit dem Lemma davor folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z}dw - \int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w-z}dw\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial B_\rho(a)} g(w)dw - \int_{\partial B_\sigma(a)} g(w)dw\right) + \frac{f(z)}{2\pi i}\left(\int_{\partial B_\rho(a)} \frac{1}{w-z}dw - \int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{1}{w-z}dw\right) \\
&= f(z).
\end{aligned}$$

□

Beweis der Existenzaussage in Satz 5.7. Für $r < \sigma < \rho < R$ definieren wir

$$f_1 : B_\rho(a) \to \mathbb{C}, \quad f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$
$$f_0 : \mathbb{C} \backslash \overline{B_\sigma(a)} \to \mathbb{C}, \quad f_0(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Parameter-differentation unter dem Integral ergibt, dass f_0 und f_1 holomorph sind. Außerdem gilt

$$|f_0(z)| \leq \sigma \max_{\partial B_\sigma(a)} |f| \frac{1}{|z| - \sigma} \to 0 \quad \text{mit } |z| \to \infty.$$

Mit dem vorigen Lemma gilt auch, dass $f_0(z) + f_1(z) = f(z)$ falls $z \in A_{\sigma,\rho}(a)$. Damit ist der Satz für $A_{\sigma,\rho}(a)$ bewiesen.

Wir wiederholen die Konstruktion für $\widetilde{\sigma} < \sigma$ und $\widetilde{\rho} > \rho$ und wir erhalten $\widetilde{f_0}$ und $\widetilde{f_1}$ wie zuvor mit $f = \widetilde{f_0} + \widetilde{f_1}$ auf $A_{\widetilde{\sigma},\widetilde{\rho}}(a)$. Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung auf $A_{\sigma,\rho}(a)$ folgt $f_0 = \widetilde{f_0}$ und $f_1 = \widetilde{f_1}$ auf $A_{\sigma,\rho}(a)$. Es folgt f_0 und f_1 können eindeutig auf $\mathbb{C} \backslash \overline{B_{\widetilde{\sigma}}(a)}$ und $B_{\widetilde{\rho}}(a)$ fortgesetzt werden. Da dies richtig ist für beliebige Werte $\sigma > r$ und $\rho < R$, folgt es gibt eindeutige Funktionen f_0 und f_1, die der Aussage des Satzes genügen. $\square$

05.12.2022

5.10 Definition. Eine Reihe der Form $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ heißt Laurentreihe.

Bemerkung. Man zerlegt eine Laurentreihe in ihren Hauptteil und ihren Nebenteil.

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu = \underbrace{\sum_{\nu=-1}^{-\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu}_{\text{Nebenteil}}.$$

Man sagt die Laurentreihe konvergiert, falls Haupt- und Nebenteil einzeln (lokal gleichmässig) konvergieren. Der Nebenteil ist eine Potenzreihe mit einem Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$.

Der Hauptteil ist eine Potenzreihe in $\frac{1}{z-z_0}$. Der Hautteil konvergiert für $|z| > r$ für eine $r \in [0, \infty]$.

Ein Laurentreihe konvergiert somit auf einem Annulus $A_{r,R}(z_0)$ wobei $A_{r,R}(0) = \emptyset$ falls $R \leq r$. Auf $\overline{A_{\sigma,\rho}(z_0)}$ mit $r < \sigma < \rho < R$ konvergiert die Laurentreihe gleichmässig.

Durch die Transformation $f(z) \to f(\frac{1}{z})$ lassen sich Aussagen über Potenzreihen wie z.B. der Identitätssatz auf Laurentreihen übertragen.

5.11 Satz (Laurentreighenentwicklung auf $A_{r,R}(a)$)**.** *Sei $f : A_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph, wobei $0 \leq r < R \leq \infty$. Dann hat f eine eindeutig bestimmte Reihendarstellung*

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu \text{ für } z \in A_{r,R}(z_0).$$

Es gilt:

1. *$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ konvergiert lokal gleichmässig auf $B_R(z_0)$.*
2. *$\sum_{\nu=-1}^{-\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ konvergiert lokal gleichmässig auf $\mathbb{C}\backslash\overline{B_r(z_0)}$.*

Die Koeffizienten a_ν sind gegeben durch

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{\nu+1}} dw \text{ für alle } \nu \in \mathbb{Z}.$$

wobei $\rho \in (r, R)$ beliebig gewählt werden kann.

Beweis. O.E. sei $z_0 = 0$. Mit dem vorigen Satz folgt $f = f_0 + f_1$ auf $A_{r,R}(0)$ mit $f_0 : A_{r,\infty}(0) \to \mathbb{C}$ und $f_1 : B_R(0) \to \mathbb{C}$ holomorph, wobei $f_0(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$.

Aus dem Potenzreihendarstellungssatz folgt bereits $f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ auf $B_R(0)$.

Dann betrachten wir $g : B_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}$ mit

$$g(w) = \begin{cases} f_0(\frac{1}{w}) & w \neq 0 \\ 0 & w = 0. \end{cases}$$

Aus dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz folgt zunächst: g holomorph. Somit gilt

$$g(w) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu w^\nu \text{ für } |w| < \frac{1}{r}.$$

Daraus folgt mit $a_\nu = b_{-\nu}$ für $\nu \in \mathbb{Z}^-$, dass

$$f_0(z) = g(\frac{1}{z}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu z^{-\nu} = \sum_{\nu=-1}^{-\infty} a_\nu z^\nu.$$

Diese Reihe konvergiert lokal gleichmässig für $|z| > r$. Daraus folgt die gewünschte Darstellung. Weiterhin folgt

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{\mu+1}} dw &= \int_{\partial B_\rho(z_0)} \left[\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (w-z_0)^{\nu-\mu-1}\right] dw \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu \underbrace{\int_{\partial B_\rho(z_0)} (w-z_0)^{\nu-\mu-1} dw}_{2\pi i \delta_{\mu\nu}} = 2\pi i a_\mu\end{aligned}$$

Der Wert des Integrals folgt aus dem Beispiel nach dem Satz (3.8).

Die Formel für die Koeffizienten folgt also aus der Reihendarstellung und ist insbesondere deshalb eindeutig. □

5.12 Folgerung (Cauchy Abschätzung für die Laurentkoeffizienten)**.** *Sei $f : A_{r,R}(0) \to \mathbb{C}$ holomorph, $0 \leq r < R \leq \infty$, und $|f(z)| \leq M \ \forall z \in \partial B_R(0)$. Dann gilt*

$$|c_n| \leq \frac{M}{R^n} \ \textit{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Bemerkung. Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ meromorph und $z_0 \in \Omega$ eine isolierte Singularität. Es gibt $r < R$, so dass $A_{r,R}(z_0) \subset \Omega \backslash \{z_0\}$ und $f|_{A_{r,R}(z_0)}$ holomorph. Der Hauptteil der zugehörigen Laurentreihe heißt auch Hauptteil von f.

Am Hauptteil lässt sich der Typ der Singularität in z_0 ablesen. Verschwindet der Hauptteil ist die Singularität hebbar, ist der Hauptteil endlich, so ist z_0 ein Pol, und ist der Hauptteil unendlich ist die Singularität wesentlich.

5.13 Folgerung (Riemann'scher Hebbarkeitssatz)**.** *Ist f in einer Umgebung einer isolierten Singularität beschränkt, so ist die Singularität hebbar.*

Beweis. Es gilt $|c_n| \leq \frac{M}{r^n}$ für alle $r \in (0, \epsilon)$ mit $\epsilon > 0$ klein genug, und insbesondere für $n \in \mathbb{Z}^-$. Es folgt $c_n = 0$ für $n \in \mathbb{Z}^-$. □

5.14 Satz (Casorati-Weierstraß)**.** *Ist z_0 eine wesentliche Singularität einer meromorphen Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, dann ist $f(B_\epsilon(z_0) \backslash \{z_0\})$ dicht in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Angenommen es gibt $B_\delta(w_0) \subset \mathbb{C}$, so dass $B_\delta(w_0) \cap f(B_\epsilon(z_0) \backslash \{z_0\}) = \emptyset$. Dann ist z_0 eine hebbare Singularität von $\frac{1}{f(z)-w_0} =: h(z)$. In Singularitäten von f is h nicht definiert, da aber $h(z) \in B_\epsilon(w_0)$ für alle z im Definitionsbereich von f, kann h auf ganz Ω holomorph forgesetzt werden. Aber es gilt auch

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} + w_0.$$

Somit wäre z_0 hebbar oder ein Pol im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Beispiele. 1. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ is meromorph in $\mathbb{C}$ mit 2 Polstellen bei $z = 0$ und $z = 1$. Ein Partialbruchzerlegung ergibt

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = f_0 + f_1 \text{ mit } f_0(z) \to 0 \text{ falls } |z| \to \infty.$$

f_0 und f_1 sind genau der Haupt- und Nebenteil von f auf $A_{0,1}(0)$.

Es gilt $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ auf $B_1(0)$ und $\frac{1}{z} = z^{-1}$ is definiert $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Somit ist die Laurentreihe von f auf dem Annulus $A_{0,1}(0)$ gegeben durch

$$\sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ (Haupt- und Nebenteil).}$$

In gleicher Weise berechnet man die Laurentreihe von f auf $A_{0,1}(1)$: $\sum_{n=-1}^{\infty}(1-z)^n$.

Wir können f auch auf $A_{2,\infty}(-1)$ betrachten und eine Zerlegung in Haupt- und Nebenteil finden. Dazu betrachten wir erst $\widetilde{f}(z) = f(z-1) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ auf $A_{2,\infty}(0)$. Wir suchen also die Laurentreihe von $f(z-1)$ auf $A_{2,\infty}(0)$. Es gilt

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}.$$

Betrachte nun $h(z) = \frac{1}{\frac{1}{z}-1} = \frac{z}{1-z} = \sum_{k=1}^{\infty} z^k$ auf $B_1(0)$. Also ist die Laurentreihe von $\frac{1}{z-1} = h(\frac{1}{z})$ auf $A_{1,\infty}(0)$:

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} z^k.$$

Dann sei $g(z) = \frac{1}{\frac{1}{z}-2} = \frac{z}{1-2z} = z\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^k = \sum_{k=1} 2^{k-1} z^k$ auf $B_2(0)$. Also ist die Laurentreihe von $\frac{1}{z-2} = g(\frac{1}{z})$ auf $A_{2,\infty}(0)$:

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} 2^{-k-1} z^k.$$

Die Laurentreihe von f auf $A_{2,\infty}$ ist also $\sum_{k=-1}^{-\infty}(1-2^{-k-1})z^k$. Der Nebenteil ist 0.

2. $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k}$ hat eine wesentlich Singularität bei 0. Die Laurentreihe auf $A_{0,\infty}(0)$ ist

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{z^k}{(-k)!} + 1.$$

13.12.2022

5.15 Definition (Residuum)**.** Sei $f : \Omega \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit isolierter Singularität bei $z_0 \in \Omega$. Für genügend kleine $\epsilon > 0$ ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} f(z)dz =: \mathrm{Res}_{z_0} f.$$

ist wohldefiniert und heist Residuum von f an der Stelle z_0.

Bemerkung. Wir können f auf $A_{0,\epsilon'}(z_0)$ als Laurentreihe $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ entwickeln mit $\epsilon' > \epsilon$, so dass $A_{0,\epsilon'}(z_0) \subset \Omega$. Haupt- und Nebenteil der Laurenreihe konvergieren lokal gleichmässig in $A_{0,\epsilon'}(z_0)$. Also gilt

$$\int_{\partial B_\epsilon(z_0)} f(z)dz = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} (z-z_0)^\nu dz = a_{-1} \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{1}{z-z_0} dz = a_{-1} 2\pi i.$$

Also gilt $\mathrm{Res}_{z_0} f = a_{-1}$.

6 Residuensatz

6.1 Definition. Sei $\gamma : [a,b] \to G$ geschlossen und stückweise C^1, und $z_0 \notin \gamma([a,b])$. Die Umlaufzahtl von γ bzgl. z_0 ist

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-z_0} dz.$$

Beispiel (zur Berechnung der Umlaufzahl)*.* Sei zunächst $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \backslash \{z_0\}$ in Polarkoordinaten gegeben, d.h.

$$\gamma(t) = z_0 + r(t) e^{i\varphi(t)}$$

mit $r, \varphi \in C^1([a,b])$ und $r > 0$. Dann berechnet man wie in Aufgabe 2 von Übungsblatt 4:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \left[\log r(t) + i\varphi(t)\right]_{t=a}^{t=b}.$$

Für γ geschlossen gilt $r(a) = r(b)$ und $e^{i\varphi(b)} = e^{i\varphi(a)}$. Also folgt $\varphi(b) - \varphi(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$ und

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi} (\varphi(b) - \varphi(a)) \in \mathbb{Z}.$$

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$.

Wir können wir eine Polardarstellung für γ wie folgt bestimmen. Falls $\varphi, r \in C^1([a,b])$ mit $r > 0$ existieren, so dass $\gamma(t) = r(t) e^{i\varphi(t)}$, berechnet man

$$0 = \frac{d}{dt} \left(e^{-i\varphi(t)} \frac{\gamma(t)}{\gamma(a)} \right) = e^{-i\varphi(t)} \frac{\gamma(t)}{\gamma(a)} \left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} - \frac{r'(t)}{r(t)} - i\varphi'(t) \right) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} - \frac{r'(t)}{r(t)} - i\varphi'(t).$$

Einen Umformung ergibt $\varphi'(t) = -i \left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} - \frac{r'(t)}{r(t)} \right)$. Insbesondere ist die rechte Seite reell. Durch Integration bzgl. $t \in [a,b]$ erhält man

$$\varphi(t) - \varphi(a) = -i \int_a^t \left[\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} - \frac{r'(t)}{r(t)} \right] dt = -i \int_a^t \frac{\gamma'(t) r(t) - r'(t)\gamma(t)}{\gamma(t) r(t)} dt = -i \int_a^t \frac{\widetilde{\gamma}'(t)}{\widetilde{\gamma}(t)} dt.$$

wobei $\widetilde{\gamma}(t) = \frac{\gamma(t)}{r(t)} = \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$.

6.2 Satz. *Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stückweise C^1 und geschlossen.*

1. *Es gilt $n(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$.*
2. *Die Funktion $z \in \mathbb{C}\backslash\gamma([a, b]) \mapsto n(\gamma, z)$ ist konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C}\backslash\gamma([a, b])$.*
3. *$n(\gamma, z) = 0$ falls $|z|$ hinreichend groß.*

Beweis. 1. Falls $z_0 \notin \gamma([a, b])$, dann lässt sich $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t) - z_0$ in Polarkoordinaten schreiben (siehe Beispiel). Somit folgt aus dem Beispiel, dass $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$.

2. Die Umlaufzahl $n(\gamma, z_0)$ ist gegeben durch Integration eines Integranden, der lokal gleichmässig stetig von dem Paremeter z_0 abhängt. Somit folgt aus dem Satz über die Stetigkeit von Parameterintegralen, dass $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\gamma([a, b])$ stetig ist.

3. Sei $R = \max_{t\in[a,b]} |\gamma(t)|$. Falls $|z| > R$, dann gilt zunächst

$$|z - \gamma(t)| \geq ||z| - |\gamma(t)|| = |z| - |\gamma(t)| \geq |z| - R > 0.$$

Somit folgt

$$|n(\gamma, z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w - z}dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{1}{|\gamma(t) - z|}|\gamma'(t)|dt = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|z| - R}L(\gamma) \to 0$$

falls $|z| \to \infty$. Für $|z| > R$ hinreichend groß gilt also $n(\gamma, z) < \epsilon$. Aus 1. folgt somit $n(\gamma, z) = 0$. □

6.3 Definition. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stückweise C^1 und geschlossen. Die Mengen

$$\operatorname{Int}\gamma = \{z \in \mathbb{C}\backslash\gamma([a, b]) : n(\gamma, z) \neq 0\} \text{ und } \operatorname{Ext}\gamma = \{z \in \mathbb{C}\backslash\gamma([a, b]) : n(\gamma, z) = 0\}$$

heißen das Innere (Interior) bzw. das Äußere (Exterior) von γ.

Bemerkung.

1. $n(\gamma, \cdot)$ stetig. Somit $\operatorname{Int}\gamma$ und $\operatorname{Ext}\gamma$ offen: Falls $z \in \operatorname{Int}\gamma$, dann ist $n(\gamma, z) = k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Sei $\epsilon \in (0, 1)$. Wegen der Stetigkeit existiert ein $\delta > 0$, so dass $n(\gamma, w) = k$ für alle $w \in B_\delta(z)$. Also gilt $B_\delta(z) \subset \operatorname{Int}\gamma$. Analog argumentiert man für Ext.
2. Es gilt
$$\operatorname{Ext}\gamma\dot{\cup}\gamma([a, b])\dot{\cup}\operatorname{Int}\gamma = \mathbb{C}.$$
3. $\operatorname{Int}\gamma$ ist eine beschränkte Menge, $\operatorname{Ext}\gamma$ ist nicht leer und eine unbeschränkte Menge.
Beweis der Bemerkung. Sei $V = \mathbb{C}\backslash B_R(0)$ mit $R = \max_{t\in[a,b]} |\gamma(t)|$. V ist unbeschränkt und zshg. Also gilt $n(\gamma, \cdot) = 0$ auf V, und somit $\operatorname{Ext}\gamma \subset V$. Also gilt auch $\gamma([a, b])\dot{\cup}\operatorname{Int}\gamma \subset B_R(0)$.

15.12.2022

6.4 Satz (Allgemeiner Cauchy Integralsatz)**.** *Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Folgende Aussagen über $\gamma : [a, b] \to G$, geschlossen und stückweise C^1, sind äquivalent:*

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw = 2\pi i n(\gamma, z) f(z) \quad \forall z \in G \backslash \gamma([a, b])$ *(Cauchy Integralformel)*
2. $\displaystyle\int_\gamma f(z) dz = 0,$
3. $\operatorname{Int} \gamma \subset G.$

Bemerkung. Zu 3. sagt man auch: "γ umläuft keinen Punkt im Komplement von G".

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2. : Die Funktion $h(w) = (w - z)f(w)$ ist holomorph in G und es gilt $h(z) = 0$. Aus der Integralformel folgt deshalb

$$0 = \int_\gamma \frac{h(w)}{(w-z)} dz = \int_\gamma f(w) dw.$$

2. $\Rightarrow$ 3. : Falls $z \notin G$, so ist $h(w) = \frac{1}{w-z}$ holomorph in G. Also folgt aus 1. :

$$n(\gamma, z) = \int_\gamma \frac{1}{w-z} dw = 0.$$

3. $\Rightarrow$ 1. : Wir betrachten eine Funktion $g : G \times G \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$g(w, z) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \quad \text{falls } w \neq z \quad \text{und } g(w, z) := f'(z) \quad \text{falls } w = z.$$

Nun gilt die Integralformel 1. für $z \in G \backslash \gamma([a, b])$ genau dann, wenn

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \int_\gamma g(w, z) dw.$$

6.5 Lemma. *Die Funktion $h(z) = \int_\gamma g(w, z) dw$ ist holomorph in G.*

Beweis des Lemmas. Wir wissen bereits: Da f holomorph in G ist, folgt, dass für festes $w \in G$ die Funktion $h_w : z \in G \mapsto g(w, z)$ ebenfalls holomorph in G ist. Somit folgt aus Satz (3.15) (oder ...), dass die Funktion h holomorph auf G ist, falls wir zeigen, dass $g : G \times G \to \mathbb{C}$ stetig ist. Wir sehen sofort, dass g stetig in (w, z), falls $w \neq z$. Also müssen wir nur den Fall $w = z$ untersuchen.

Sei dazu $(w, z) = (c, c)$ für $c \in G$. Es gibt eine Reihendarstellung $\sum_{k=0}^\infty a_k (z - c)^k$ von f in einem Ball $B_r(c)$ um c. Insbesondere: für $\delta \in (0, r)$ beliebig konvergiert somit die reelle Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_k \delta^k$ sowie auch ihre erste und zweite Ableitung $\sum_{k=1}^\infty a_k k \delta^{k-1}$ und $\sum_{k=2}^\infty a_k k(k-1) \delta^{k-2}$ für die selben $\delta \in (0, r)$.

Sei nun $(w, z) \in G \times G$ mit $w \neq z$ und $\max\{|w - c|, |z - c|\} \leq \delta$. Dann schreiben wir

$$g(w, z) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \frac{1}{w - z} \left(a_1(w - c - (z - c)) + \sum_{k=2}^\infty a_k \left[(w - c)^k - (z - c)^k \right] \right).$$

Da $a_1 = f'(c) = g(c,c)$, gilt also

$$g(w,z) - g(c,c) = \frac{1}{w-z} \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left[(w-c)^k - (z-c)^k \right].$$

Um die rechte Seite zu untersuchen, betrachten wir $(w-c)^k - (z-c)^k = p_k(w,z)$.

Betrachte die Funktion $\xi \in \mathbb{C} \mapsto \xi^k$. Gegeben seien $\xi_0, \xi_1 \in B_\delta(0)$. Aus dem n-dimensionalen Mittelwertsatz folgt

$$\left| \xi_0^k - \xi_1^k \right| \leq \max_{\xi \in B_\delta(0)} \left| \left(\xi^k \right)' \right| |\xi_0 - \xi_1|$$

wobei $(\xi^k)' = k\xi^{k-1}$, $\left| k\xi^{k-1} \right| = k|\xi|^{k-1} \leq k\delta^{k-1}$ falls $\xi \in B_\delta(0)$. Damit erhalten wir

$$|p_k(w,z)| \leq k\delta^{k-1} |w - c - (z-c)| = k\delta^{k-1}|w-z|.$$

Somit folgt nun

$$|g(w,z) - g(c,c)| \leq \frac{1}{|w-z|} \sum_{k=2}^{\infty} a_k k \delta^{k-1} |w-z| = \delta \sum_{k=2}^{\infty} a_k k \delta^{k-2} \leq \delta \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)\delta^{k-2}}_{\leq C < \infty}.$$

Ist $\epsilon > 0$ gegeben, so gilt für $\epsilon / C =: \hat{\delta}$:

$$|g(w,z) - g(c,c)| < \epsilon \quad \text{falls } w \neq z \text{ und } \quad \max\{|w-c|, |z-c|\} < \hat{\delta}.$$

Außerdem existiert ein $\delta' > 0$, so dass

$$|g(w,w) - g(c,c)| = |f'(w) - f'(c)| < \epsilon \text{ falls } |w-c| < \delta'.$$

Wähle nun $\delta := \min\{\delta', \hat{\delta}\}$. Das ergibt genau die ϵ-δ-Definition der Stetigkeit von g in (c,c). □

Wir können den Beweis nun mit Hilfe des Satzes von Liouville abschließen, indem wir zeigen, dass h sich zu einer ganzen Funktion $\hat{h}$ mit $\lim_{|z| \to 0} \hat{h}(z) = 0$ fortsetzen läßt. Dann folgt

$$h(z) = \int_\gamma g(w,z)dw \equiv 0.$$

Wir betrachten die Funktion

$$\widetilde{h}(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$$

auf $\operatorname{Ext} \gamma$. Wieder mit Satz (3.15) folgt, dass $\widetilde{h}$ holomorph ist auf $\operatorname{Ext} \gamma$. Außerdem gilt $\widetilde{h}(z) \to 0$ falls $|z| \to \infty$ (beachten Sie dazu, dass f auf $\gamma([a,b])$ beschränkt ist).

Da $\int_\gamma \frac{1}{\xi - z} d\xi = 0$ für alle $z \in \operatorname{Ext} \gamma$, folgt

$$h(z) = \int_\gamma g(w,z)dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_\gamma \frac{f(z)}{w-z} dz = \widetilde{h}(z)$$

für alle $z \in G \cap \operatorname{Ext}\gamma$.

Da nach Voraussetzung $\operatorname{Int}\gamma \subset G$, folgt $G \cup \operatorname{Ext}\gamma = \mathbb{C}$. Duch

$$\bar{h}(z) = \begin{cases} h(z) & \text{für } z \in G, \\ \widetilde{h}(z) & \text{für } z \in \operatorname{Ext}\gamma. \end{cases}$$

h wird also durch $\bar{h}$ zu einer ganzen Funktion fortgesetzt mit $\bar{h}(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$. Also gilt $\bar{h} \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$ und somit auch $h \equiv 0$ auf G. □

Bemerkung. Der Beweisschritt 3. ⇒ 1. geht zurück auf eine Arbeit von Dixon.

6.6 Definition. Für geschlossene und stückweise C^1 Wege $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$, in einem Gebiet G und ganze Zahlen a_i heißt die formale Linearkombination $\gamma = a_1\gamma_1 + \cdots + a_n\gamma_n$ Zykel oder Zyklus mit ganzzahligen Koeffizienten.

Das Kurvenintegral einer holomorphen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ entlang eines Zykels γ in G ist definiert durch

$$\int_\gamma f(z)dz = a_1 \int_{\gamma_i} f(z)dz + \cdots + a_n \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

Für einen Punkt $z \notin \bigcup_{i=1}^n \gamma([a_i, b_i])$ ist die Umlaufzahl von γ bzgl. z definiert durch

$$n(\gamma, z) = \sum_{i=1}^n a_i n(\gamma_i, z).$$

Bemerkung. Der Allgemeine Cauchy Integralsatz gilt nun genauso, wenn man den Weg $\gamma : [a, b] \to G$ durch einen Zykel γ ersetzt.

6.7 Satz (Residuensatz)**.** *Sei f holomorph in einem Gebiet G bis auf isolierte Singularitäten, d.h. $f : G\backslash S \to \mathbb{C}$ ist holomorph und S ist die Menge der isolierten Singularitäten. Sei $\gamma : [a, b] \to G\backslash S$ geschlossen und stückweise C^1 mit $\operatorname{Int}\gamma \subset G$ (oder eine Zykel der S nicht trifft). Dann gilt $n(\gamma, s) \neq 0$ nur für endlich viele $s \in S$ (γ umläuft nur endlich viele Punkte aus S) und es gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz = \sum_{s \in S} n(\gamma, s) Res_s f.$$

Beweis. Die Menge der von γ umlaufenen Punkte ist beschränkt ($\operatorname{Int}\gamma$ ist beschränkt). Würde γ unendlich viele Punkte in S umlaufen, so gäbe es also einen Häufungspunkt a. Die Menge $G\backslash S$ ist offen. Also ist $(\mathbb{C}\backslash G) \cup S$ abgeschlossen. Somit ist a entweder in S oder in $\mathbb{C}\backslash G$. Aber a kann also Häufungspunkt von isolierten Singularitäten selbst keine isolierte Singularität sein. Also liegt $a \in \mathbb{C}\backslash G$. Damit folgt laut Voraussetzung, dass $n(\gamma, a) = 0$. Also umläuft γ auch alle Punkte in einer hinreichend kleinen Umgebung nicht. Das ist ein Widerspruch.

Seien $a_1, \ldots, a_m$ die Punkt, die γ umläuft (also $\operatorname{Int}\gamma \cap S = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Wir wählen Kurven β_i, $i = 1, \ldots, m$, welche den Rand $\partial B_{\epsilon_i}(a_i)$ eines kleinen Balles parametrisieren.

ϵ_i so gewählt, dass $B_{\epsilon_i}(a_i)\backslash\{a_i\} \subset G\backslash S$. Wir betrachten den Zykel $\sigma = \gamma - n(\gamma, a_1)\beta_1 - \cdots - n(\gamma, a_m)\beta_m$. Aus dem Allgemeinen Cauchy Integralsatz folgt

$$0 = \int_\sigma f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz - \sum_{i=1}^m n(\gamma, a_i) \underbrace{\int_{\beta_i} f(z)dz}_{\mathrm{Res}_{a_i} f}.$$

Das ist bereits die Behauptung. $\square$

20.12.2022

6.8 Folgerung. *G offen, sternförmig, $\gamma : [a,b] \to G$. γ umläuft keinen Punkt in G^c.*

6.9 Definition. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ hat einen C^1 Rand, falls für jedes $z_0 \in \partial G$ eine Umgebung $V \subset \mathbb{C}$ und ein C^1 Diffeomorphismus $\varphi : Q = (-1,1)^2 \to V$ mit $\varphi(0) = z_0$ existiert, so dass

1. $\varphi(Q^+) = V \cap G = V^+$ wobei $Q^+ = (-1,1) \times (0,1)$.

φ heißt Kartenabbildung um z_0. Außerdem gilt

2. $\varphi(Q^-) = V \backslash \overline{G} = V^-$ wobei $Q^- = (-1,1) \times (-1,0)$, und $V \backslash \partial G = V^+ \dot\cup V^-$,
3. $\partial V^\pm \cap V = \partial G \cap V$.

$t \in (-1,1) \to \varphi(t,0)$ heißt lokale Parametrisierung von ∂G um z_0.

6.10 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet mit C^1 Rand. Dann gibt es geschlossene C^1 Kurven $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{C}$ mit $|\gamma_i'(t)| = 1$, $i = 1, \ldots, k$, so dass ∂G die disjunkte Vereinigung von endlichen vielen $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k \subset \mathbb{C}$ ist mit $\Gamma_i = \gamma([a_i, b_i])$.*

Beweisskizze. Da G beschränkt ist, ist ∂G kompakt. Es gibt also endlich viele Kartenabbildungen $\varphi_\alpha : Q_\alpha \to V_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n$, so dass $\partial G \subset \bigcup_{\alpha=1}^n V_\alpha$.

Ohne Einschränkung sei ∂G zusammenhängend, d.h. $k = 1$. Ansonsten betrache wir eine Zusammenhangskomponent von ∂G. Wir konstruieren $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ wie folgt. Sei $\alpha_0 \in \{1, \ldots, n\}$ und $t \in [0,1) \mapsto \gamma^0(t) = \varphi_{\alpha_0}(t,0)$. Da ∂G abgeschlossen, existiert der Grenzwert $\lim_{t \to 1} \gamma^0(t) = z_1 \in \partial G$. Dann existiert $\alpha_1 \in \{1, \ldots, n\}$ und $t_1 \in (-1,1)$, so dass $\varphi_{\alpha_1}(t_1, 0) = z_1$. Wir definieren dann $t \in [t_1, 1) \mapsto \gamma^1(t) = \varphi_{\alpha_1}(t, 0)$. Wieder existiert $\lim_{t \to 1} \gamma^1(t) = z_2$ und eine Karte φ^{α_2} mit $z_2 \in V_{\alpha_2}$.

Wir führen diese Konstruktion iterativ fort und erhalten eine Folge $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$. Da die Menge der Kartenabbildungen endlich ist, existiert ein $l \in \mathbb{N}$, so dass $\alpha_l = \alpha_0$ und entweder ist γ^0 eine Einschränkung von γ^l oder umgekehrt. Ohne Einschränkung gelte das Letztere. Die C^1 Kurven γ^j, $j = 1, \ldots, l$, lassen sich umparametrisieren, so dass wir $|(\gamma^j)'(t)| = 1$ annehmen können. Durch Verkettung erhalten wir somit eine geschlossene, stückweise C^1 Kurve γ mit $\gamma([a,b]) \subset \partial G$.

Gibt es $\partial G \backslash \gamma([a,b]) \neq \emptyset$, dann gilt für alle $\hat\alpha \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, dass $\hat z \in V_{\hat\alpha} \cap \bigcup_\alpha V_\alpha = \emptyset$. Das ist aber im Widerspruch zu ∂G zusammenhängend.

Es bleibt zu zeigen, dass die so konstruierte Kurve C^1 ist. □

Umgekehrt gilt:

6.11 Lemma. *Sei $\gamma : (-r, r) \to \mathbb{C}$ eine injektive C^1 Kurve mit $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \in (-r, r)$. Es existiert $V \subset \mathbb{C}$ und ein C^1 Diffeomorphismus $\varphi : (-\delta, \delta)^2 = Q_\delta \to V$ mit $\varphi(0) = \gamma(0)$, so dass $\varphi((-\delta, \delta) \times \{0\}) = \gamma((-r, r)) \cap V$.*

Beweis. Das (Einheits)Tangentenfeld ist

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}.$$

Das (Einheits)Normalenfeld ist

$$N(t) = JT(t) \text{ mit } J = D_{\pi/2} \text{ und } D_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Betrachte $\varphi : (-r, r) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\varphi(t, s) = \gamma(t) + sN(t)$. Es gilt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(0,0) = \gamma'(0) \neq 0, \ \frac{\partial\varphi}{\partial s}(0,0) = N(0).$$

Es folgt $D\varphi(0,0)$ ist invertierbar. Nach dem Satz über lokale Umkehrbarkeit existiert somit eine $\delta > 0$, so dass $\varphi|_{(-\delta,\delta)^2}$ ein C^1 Diffeomorphismus mit Bild $\varphi((-\delta,\delta)^2) =: V$ ist. Außerdem gilt $\varphi(s, 0) = \gamma(s)$, also auch $\varphi((-\delta,\delta) \times \{0\}) = \gamma((-r, r)) \cap V$. □

Eine geschlossene, stückweise C^1 Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, die injektiv ist, heißt einfach. Ein globaler Satz ist:

6.12 Satz ((Differenzierbarer) Jordan'scher Kurvensatz)**.** *Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine einfach geschlossene C^1 Kurve und reguläre ($\gamma' \neq 0$). Dann hat $\mathbb{C} \backslash \gamma([a, b])$ genau zwei Zusammenhangskomponenten. Das sind* $\operatorname{Int}\gamma = \{z \in \mathbb{C} : n(\gamma, z) = 1\}$ *und* $\operatorname{Ext}\gamma = \{z \in \mathbb{C} : n(\gamma, z) = 0\}$. $\operatorname{Int}\gamma = G$ *ist ein beschränktes Gebiet mit C^1 Rand $\partial G = \gamma([a, b])$.*

6.13 Lemma. *Sei $\eta : [0, 1] \times [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig und $\eta(s, \cdot)$ ist eine geschlossene, stückweise C^1 Kurve für alle $s \in [0, 1]$. Sei $z_0 \notin \eta([0, 1] \times [a, b])$. Dann gilt $n(\eta_0, z_0) = n(\eta_1, z_1)$.*

Beweis. Das Parameterintegral

$$s \in [0, 1] \mapsto \int_{\eta_s} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_a^b \frac{\eta_s'(t)}{\eta_s(t) - z_0} dt \in \mathbb{Z}$$

ist stetig bezüglich s und somit konstant. □

22.12.2022

Beweis der Bemerkung nach 6.6 Definition. Wir zeigen nur die Implikation 3. $\Rightarrow$ 1.

Sei nun $\gamma = c_1\gamma_1 + \cdots + c_n\gamma_n$ ein Zyklus, so dass $n(\gamma, w) = 0$ für alle $w \in \overline{G}^c$. Wir können $c_i\gamma_i$ durch die geschlossene Kurve $\widetilde{\gamma}_i = \gamma_i * \cdots * \gamma_i : [\widetilde{a}_i, \widetilde{b}_i] \to \mathbb{C}$ ersetzen falls $c_i > 0$, und durch $(-\gamma_i) * \cdots * (-\gamma_i)$, falls $c_i < 0$ (hier ist $-\gamma_i$ die Kurve, die γ_i in entgegengesetzter Richtung durchläuft).

Da G ein Gebiet ist und somit offen und zusammenhängend, lassen sich je zwei Punkte in G durch einen stückweise stetigen Weg verbinden (z.B. ein Weg, der stückweise aus Geradensegmenten besteht, ein Polygonzug).

Nun wählen wir einen Punkt $z_0 \in G$. Wir können z_0 und $\widetilde{\gamma}_i(\widetilde{a}_i) = z_i$ durch eine stückweise C^1 Kurve $\sigma_i : [0,1] \to G$ in G verbinden. Durch Verkettung von $\sigma_i, \widetilde{\gamma}_i$ und $-\sigma_i$ erhalten wir eine neue geschlossene, stückweise C^1 Kurve $\hat{\gamma}_i = \sigma_i * \widetilde{\gamma}_i * (-\sigma_i)$ in G, und schließlich verketten wir auch alle Kurven $\hat{\gamma}_i$ miteinander. So erhalten wir eine geschlossene, stückweise C^1 Kurve $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_1 * \cdots * \hat{\gamma}_n$. Dann gilt

$$\int_{\hat{\gamma}} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\sigma_i} f(z)dz + \underbrace{\int_{\widetilde{\gamma}} f(z)dz}_{=c_i \int_{\gamma_i} f(z)dz} + \int_{-\sigma_i} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{\gamma_i} f(z)dz \overset{def}{=} \int_{\gamma} f(z)dz.$$

Die Integrale entlang σ_i heben sich mit den Integralen entlang $-\sigma_i$ weg. Damit folgt auch $n(\hat{\gamma}, w) = n(\gamma, w)$ für $w \in G^c$.

Falls $n(\gamma, w) = 0$ für alle $w \in \overline{G}^c$, so können wir also den allgemeinen Cauchyintegralsatz auf $\hat{\gamma}$ anwenden, und es folgt $\int_{\hat{\gamma}} f(z)dz = 0$. Das letzte Kurvenintegral ist aber gleich $\int_\gamma f(z)dz := \sum_{i=1}^n c_i \int_{\gamma_i} f(z)dz$. Also folgt die Behauptung. $\square$

6.14 Lemma. *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene C^1 Kurve und $\gamma(t_0) = z_0$ mit $\gamma'(t_0) \neq 0$. Sei N der Normalenvektor in z_0. Dann existiert $\epsilon > 0$, so dass $p^+ = z_0 + \epsilon N$ und $p^- = z_0 - \epsilon N$ gilt $n(\gamma, p^+) - n(\gamma, p^-) = -1$.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $t_0 = 0$, $z_0 = 0$ und $\gamma'(0)/|\gamma'(0)| = e_1 = (1,0)$. Sei N der Einheitsnormalenvektor in $z_0 = 0$.

Es gibt $\eta > 0$, so dass $\alpha N \notin \gamma([a,b])$. $\forall \alpha \in (-\eta, \eta)$. Andernfalls würden Folgen (α_i) und $t_i \in [a,b]$ existieren, so dass $\alpha_i \to 0$ und $\gamma(t_i) = \alpha_i N$. Falls $t_i \to 0$, so gilt $\frac{\alpha_i}{t_i} N = \frac{\gamma(t_i)}{t_i} \to \gamma'(0) = C \cdot e_i$. Das ist nur möglich, wenn $C = 0$. Also ein Widerspruch zu $\gamma'(0) \neq 0$. Falls $|t_i| \geq C$ für ein $C > 0$, so existiert einen Teilfolge $t_{i_j} \subset [a,b]$ mit $t_{i_j} \to t_0 \neq 0$. Also folgt $\gamma(t_{i_j}) \to \gamma(t_0)$. Andererseits gilt $\gamma(t_{i_j}) = \alpha_{i_j} N \to 0 = \gamma(0)$. Also folgt $\gamma(t_0) = 0$ im Widerspruch zur Injektivität.

Wähle nun auch $r > 0$, so dass $|\gamma(t)| < \eta/4$ falls $|t| < r$.

Es sei $\epsilon' = 4\eta$ und $\epsilon = 2\eta$. Wir definieren nun $\sigma_0^{\pm} = (1-t)\gamma(-r) + t(\pm\epsilon' N)$ und $\sigma_1^{\pm}(t) = (1-t)(\pm\epsilon' N) + t\gamma(r)$ sowie $\widetilde{\sigma}^{\pm}(t) = \sigma^{\pm}(t/r)$, $\gamma^{\pm} = \gamma|_{[a,-r]} * \widetilde{\sigma}_0^{\pm} * \widetilde{\sigma}_1^{\pm} * \gamma|_{[r,b]}$ und $p^{\pm} = \pm\epsilon N$.

1. Es gilt $n(\gamma^+, p^-) = n(\gamma, p^-)$ und $n(\gamma^-, p^+) = n(\gamma, p^+)$, denn es gibt eine (affine) Homotopie zwischen $\gamma^{\pm}$ und γ, welche $p^{\mp}$ nicht trifft.

2. Es gilt $n(\gamma^+, p^-) = n(\gamma^+, z_0)$ und $n(\gamma^-, p^+) = n(\gamma^-, z_0)$, denn $p^{\mp}$ und z_0 lassen sich durch eine gerade in $\mathbb{C} \backslash \gamma^{\pm}([a,b])$ verbinden.

3. Wir zeigen nun $n(\gamma^-, z_0) - n(\gamma^+, z_0) = 1$. Zunächst gilt: der Zykel $\gamma^- - \gamma^+$ stimmt mit der Kurve $\widetilde{\sigma}_0^+ * \widetilde{\sigma}_1^+ * (-\widetilde{\sigma}_1^-) * (-\widetilde{\sigma}_0^+) =: \sigma : [0, 4r] \to \mathbb{C}$ überein. Außerdem gibt es eine affine Homotopie zwischen σ und $C(t) = z_0 + \delta e^{-i\frac{\pi}{2}t/r}$, $t \in [0, 4r]$. Genauer definieren wir $(1-s)\sigma(t) + sC(t) = \eta_s(t)$ und $z_0 \notin \eta_s([0,4])$ for all $s \in [0,1]$. Somit gilt $n(\sigma, z_0) = n(C, z_0) = -1$.

Somit folgt $n(\gamma, p^+) - n(\gamma, p^-) = n(\gamma^-, p^+) - n(\gamma^+, p^-) = n(\gamma^-, z_0) - n(\gamma^+, z_0) = 1$. □

6.15 Folgerung. *Sei G ein beschränktes Gebiet mit C^1 Rand. Dann gilt*

$$n(\partial G, z) = \begin{cases} 1 & z \in G \\ 0 & z \in \mathbb{C} \backslash \partial G. \end{cases}$$

Beweis. Sei $n(\partial G, z) = m \in \mathbb{Z}$ für ein $z \in G$. Es gibt $z_0 \in \partial G$, so dass $|z - z_0| = \min_{w \in \partial G} |z - w|$. Dann liegt die Verbindungsgerade $(1-t)z + tz_0$ vollständig in G. Sei $\gamma : (-r, r) \to \mathbb{C}$ eine lokale Parametrisierung von ∂G um z_0, d.h. $\gamma((-r,r)) = \partial G \cap V$ für ein V offen. Ohne Einschränkung gelt $z_0 + \epsilon' N \in \mathbb{C} \backslash \overline{G}$ für ein $\epsilon' > 0$ und N der Normalenvektor in z_0 induziert durch γ. Dann folgt auch, dass für $f(t) = |\gamma(t) - z|^2$ gilt $0 = f'(0) = \langle \gamma'(0), z_0 - z \rangle$. Also ist die Verbindungsgerade $(1-t)z + tz_0$ parallel zu N. Für $\epsilon > 0$ hinreichend klein folgt: $p^\pm \in V$ und $p^+ \in \mathbb{C} \backslash \overline{G}$ und $p^- \in G$. Also gilt $n(\partial G, p^-) = m$ und $n(\partial, p^+) = m - 1$. Allerdings ist $\mathbb{C} \backslash \overline{G}$ unbeschränkt und zusammenhängend. Also muss gelten $m - 1 = 0$ und somit $m = 1$. □

Der Residuensatz erlaubt die Berechnung von reellen Integralen als Summe von Residuen.

Beispiel. Sei $f : \mathbb{C} \backslash \{i, -i\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} \frac{1}{z+i}$.

Die Funktion hat einfache Polstellen bei $z = i, -i$:

$$f(z) = \frac{1}{z-i} \left(a_0 + a_1(z-i) + a_2(z-i)^2 + \dots \right).$$

Da $a_0 + a_1(z-i) + \dots = \frac{1}{z+i}$, sieht man sofort, dass $a_0 = \frac{1}{2i}$. Es folgt: $\mathrm{Res}_i f = \frac{1}{i2}$. Analog folgern wir, dass $\mathrm{Res}_{-i} f = -\frac{1}{2i}$.

Wir wählen eine geschlossene, stückweise C^1 Kurve $\gamma : [0, \pi + 2R] \to \mathbb{C}$, also Verkettung von $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(t) = Re^{it}$ und $\gamma_2(x) = x$ mit $x \in [-R, R]$.

Behauptung: Es gilt $n(\gamma, i) = 1$.

Betrachte auch $\widetilde{\gamma} : [\pi, 2\pi + 2R] \to \mathbb{C}$ die Verkettung von $\widetilde{\gamma}_1 : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\widetilde{\gamma}_1(t) = Re^{it}$ und $\widetilde{\gamma}_2(x) = -x$ mit $x \in [-R, R]$.

Es gilt $n(\gamma, i) + n(\widetilde{\gamma}, i) = \int_\gamma \frac{1}{z-i} dz + \int_{\widetilde{\gamma}} \frac{1}{z-i} = \int_{e^{it}} \frac{1}{z-i} dz = n(e^{it}, i)$.

Nun gibt es eine affine Homotopie zwischen e^{it} und $i + \epsilon e^{it}$. Also folgt $n(e^{it}, i) = n(i + \epsilon e^{it}, i) = 1$. Außerdem ist $n(\widetilde{\gamma}, i) = 0$. Somit gilt $n(\gamma, i) = 1$.

Aus dem Residuensatz folgt

$$\pi = 2\pi i n(\gamma_R, i) \mathrm{Res}_i f = \int_{\gamma_R} \frac{1}{z_2 + 1} dz = \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2+1} dx}_{\to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx} + \underbrace{\int_0^\pi \frac{1}{R^2 e^{2it} + 1} i e^{it} dt}_{\to 0}.$$

Allerdings kannten wir den Wert dieses Integrals bereits, da $\frac{1}{x^2+1} = \arctan'(x)$.

Die Situation des Beispiels kann wie folgt verallgemeinert werden.

6.16 Lemma. *Sei* $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ *eine rationale Funktion, die bei* ∞ *von mindestens zweiter Ordnung verschwindet und keinen Pol auf der reellen Achse hat. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{a \in N_q, \mathrm{Im} a > 0} Res_a R.$$

Beweis. Der Beweis ist eine Übungsaufgabe und man gehe vor im vorigen Beispiel. □

Der Residuensatz erlaubt auch die Berechnung von Integralen über ein Interval.

6.17 Lemma. *Sei* $R(x, y)$ *ein rationale Funktion in zwei Variablen, so dass* $R(\cos\theta, \sin\theta)$ *endlich ist für alle* $\theta \in [0, 2\pi]$. *Dann gilt*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = 2\pi i \sum_{|a|<1} Res_a \frac{1}{iz} R(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})).$$

Beweis. Sei $\widetilde{R}(z) = \frac{1}{iz} R(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}))$. Betrachte

$$\int_{\partial B_1(0)} \widetilde{R}(z)dz = \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} \widetilde{R}(e^{it}) i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt.$$

□

10.01.2023

6.18 Satz (Cauchyintegralsatz auf Gebieten)**.** *Sei G ein Gebiet, beschränkt mit C^1 Rand, und $f \in C^1(\overline{G}, \mathbb{C})$ holomorph auf G. Dann gilt*

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 0.$$

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Satzes ist es möglich den Integralsatz von Gauß anzuwenden:

6.19 Satz. *Sei $V \in \mathbb{C}^1(\overline{G}, \mathbb{R}^2)$ und G wie zuvor, dann gilt*

$$\int_G \underbrace{\left(\frac{\partial V^1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial V^2}{\partial y}(x,y)\right)}_{\operatorname{div} V(x,y)} dxdy = \int_{\partial G} \langle N, V\rangle(s)ds = \int_a^b \langle V, N\rangle \circ \gamma(t)|\gamma'(t)|dt$$

wobei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene Kurve, die den Rand ∂G von G (positiv) parametrisiert und N is das innere Einheitsnormalenvektorfeld.

Falls $\gamma = (\alpha, \beta)$ für $\alpha, \beta \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ mit $|\gamma'| = 1$, dann ist $N \circ \gamma(t) = D_{\pi/2}\gamma'(t) = (-\beta'(t), \alpha'(t))$, denn $D_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sei nun $f \in C^1(\overline{G}, \mathbb{C})$ holomorph mit $f = v + iu$. Dann

$$\begin{aligned}
\int_{\partial G} f(z)dz &= \int_a^b (u + iv) \circ \gamma(t) \cdot (\alpha'(t) + i\beta'(t))dt \\
&= \int_a^b \underbrace{u \circ \gamma(t)\alpha'(t) - v \circ \gamma(t)\beta'(t)}_{\langle (v,u), N\rangle \circ \gamma(t)} dt + i \int_a^b \underbrace{u \circ \gamma(t)\beta'(t) + v \circ \gamma(t)\alpha'(t)}_{\langle (-u,v), N\rangle \circ \gamma(t)} dt \\
&= \int_G \underbrace{\operatorname{div}(v,u)(x,y)}_{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}} dxdy + i \int \underbrace{\operatorname{div}(-u,v)(x,y)}_{-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}} dxdy = 0
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, da f holomorph. □

Bemerkung.
1. Für den Beweis des Cauchy Integralsatzes durch den Satz von Gauß ist die Voraussetzung $f \in C^1(\overline{G}, \mathbb{C})$ essentiell, d.h. f muss als stetig differenzierbar vorausgesetzt werden. Man beachte, dass wir die Stetigkeit der Ableitung für holomorphe Funktionen aus dem Cauchy Integralsatz folgern mussten.
2. Es ist wichtig, dass γ ein Gebiet berandet.

6.20 Folgerung (Residuensatz auf Gebieten)**.** *Sei G ein beschränktes Gebiet mit C^1 Rand und $f \in C^1(\overline{G}\backslash S, \mathbb{C})$ holomorph mit $S = \{z_1, \ldots, z_n\} \subset G$. Dann gilt*

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n Res_{z_i} f.$$

Beweis. Wir können Kurven β_i wählen, die den Rand $\partial B_{\epsilon_i}(z_i)$ eines kleinen Balles um z_i im Uhrzeigersinn parametrisieren (d.h. der induzierte Normalenvektor zeigt nach Innen), so dass $B_\epsilon(z_i) \subset\subset G$ und $\overline{B_{\epsilon_i}(z_i)} \cap \overline{B_{\epsilon_j}(z_j)} = \emptyset \ \forall i \neq j$. Dann ist $\widetilde{G} = G \setminus \bigcup_{i=1}^n B_{\epsilon_i}(z_i)$ ein Gebiet mit C^1 Rand. Somit folgt aus dem Cauchy Integralsatz für Gebiete

$$0 = \int_{\partial \widetilde{G}} f(z)dz = \int_{\partial G} f(z)dz - \underbrace{\sum_i \int_{\partial B_{\epsilon_i}(z_i)} f(z)dz}_{2\pi i \mathrm{Res}_{z_i} f(z)}.$$

□

Bemerkung. Der Gaußsche Integralsatz gilt auch für Gebiete mit einer endlichen Anzahl von Ecken. Somit gilt auch der Cauchy Integralsatz sowie der Residuensatz für solche Gebiete.

Da $|e^{iz}| \leq 1$ in der oberen Halbebene, gilt die Aussage des Lemma (6.16) auch für Integranden der Form $\frac{p(z)}{q(z)}e^{iz}$. Außerdem verbessert der Faktor e^{iz} das Konvergenzverhalten für $z \to \infty$ des Integranden und es reicht zu fordern, dass $\frac{p}{q}$ bei ∞ in erster Ordnung verschwindet.

6.21 Lemma. *Sei $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine rationale Funktion, die bei ∞ verschwindet und keinen Pol auf der reellen Achse hat. Dann gilt für $a > 0$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax}dx = 2\pi i \sum_{w \in N_q, \mathrm{Im} w > 0} Res_w R(z)e^{iaz}. \tag{3}$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $a = 1$ (nach Anwendung einer Substitution $x \to \frac{1}{a}x$). Wir integrieren $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}e^{iz}$ über einen Weg γ_r, der ein Rechteck mit Kantenlänge $2r > 0$ und $r > 0$ parametrisiert, so dass eine Kante parallel an der x-Achse anliegt. Genauer sei $\gamma_r = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4$ mit $t \in [-r, r] \mapsto \gamma_1(t) = t$, $t \in [0, r] \mapsto \gamma_2(t) = r + it$, $t \in [-r, r] \mapsto \gamma_3(t) = r - t + ir$ und $t \in [0, r] \mapsto \gamma_4(t) = -r + i(r - t)$.

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_r} f(z)dz &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz \\ &= \int_{-r}^{r} \frac{p(t)}{q(t)}e^{it}dt + \int_0^r \frac{p(r+it)}{q(r+it)}e^{ir-t}dt - \int_{-r}^{r} \frac{p(t+ir)}{q(t+ir)}e^{it-r}dt + \dots\end{aligned}$$

Wir untersuchen das zweite und dritte Integral auf der rechten Seit. Dei Voraussetzung, dass $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ bei ∞ verschwindet bedeutet, dass $\forall \epsilon > 0 \ \exists M > 0$ mit $|R(z)| \leq \epsilon$ falls $|z| \geq M$. Wir wählen $r > 0$ also so, dass $|\gamma_r(t)| \geq M$ für alle t. Dann folgt für das zweite Integral

$$\left| \int_0^r \frac{p(t)}{q(t)} e^{ir} e^{-t} dt \right| \leq \int_0^r |R(t)e^{ir}| e^{-t} dt \leq \epsilon \int_0^r e^{-t} dt = \epsilon(1 - e^{-r}) \leq 2\epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ist das Integral 0. Entsprechend behandelt man das dritte (und auch das vierte Integral). □

Bemerkung. 1. Die Aussage des Lemma gilt auch falls $R(z) = f(z)$ holomorph mit $f(z) \to 0$ für $z \to \infty$.

2. Die Funktion $a \mapsto F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx$ heißt Fouriertransformiert von f. Falls $a < 0$, betrachte

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx = -\int_{\infty}^{-\infty} f(-x)e^{-iax}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{-iax}dx.$$

6.22 Lemma (Zur Residuenberechnung)**.** *Seien g, h holomorphe Funktionen in einer Umgebung von p mit $g(p) \neq 0$, $h(p) = 0$ und $h'(p) \neq 0$ (d.h. p ist ein einfacher Pol von g/h). Dann gilt*

$$Res_p \frac{g}{h}(z) = \frac{g(p)}{h'(p)}.$$

Beweis. In einer Umgebung von p gilt $h(z) = h'(p)(z-p) + h''(p)(z-p)^2 + \ldots$. Somit ist p ein einfacher Pol von g/h und in einer Umgebung von p gilt $g(z)/h(z) = \mathrm{Res}_p \frac{g(z)}{h(z)}(z-p)^{-1} + \ldots$. Also folgt

$$\mathrm{Res}_p \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to p} (z-p)\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(p)}{h'(p)}.$$

□

Beispiel. Wir wollen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}e^{2ix}dx$ berechnen. $f(z) = \frac{z}{1+z^2}e^{2iz}$ hat eine einfache Polstelle bei $z = i$. Das Residuen berechnet sich durch

$$\left.\frac{ze^{2iz}}{2z}\right|_{z=i} = \frac{1}{2}e^{-2}.$$

Somit folgt mit dem Lemma, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \pi i e^{-2}.$$

Entsprechend ist das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}e^{-2ix}dx = -\pi i e^{2}$. Beachte, dass $\mathrm{Re}e^{ix} = \cos x$ und $\mathrm{Im}e^{ix} = \sin x$ für $x \in \mathbb{R}$. Somit folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(2x)}{1+x^2}dx = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}e^{i2x}dx = \pi e^{-2} \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(2x)}{1+x^2}dx = 0.$$

12.01.2023

Lemma (6.16) und Lemma (6.21) können wir nicht benutzen um $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ zu berechnen, da $\frac{1}{z}$ die Polstelle 0 auf der x-Achse hat und $\frac{1}{x}$ im eigentlichen Sinne nicht auf $\mathbb{R}$ integrierbar ist.

6.23 Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein endliches oder unendliches Intervall, $p \in I$ und $f : I \backslash \{p\} \to \mathbb{C}$ stetig. Es gelte: für jedes $\epsilon > 0$ existiert das Integral $\int_{I \backslash (p-\epsilon, p+\epsilon)} f(t)dt$ im gewöhnlichen Sinne (z.B. falls $I = [a, b]$ endlich). Falls der Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{I \backslash (p-\epsilon, p+\epsilon)} f(t)dt =: \int_I f(t)dt$$

existiert, so heißt $\int_I f(t)dt$ Hauptwert des Integrals von f über I. Analog definiert man den Hauptwert des Integrals von f über I für $f : I \backslash \{p_1, \ldots, p_n\} \to \mathbb{C}$ stetig mit endlich vielen $p_1, \ldots, p_n \in I$.

Beispiel.

1. Der Hauptwert von $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin x}{x}$ über $\mathbb{R}$ stimmt mit dem Integral von $\frac{\sin x}{x}$ überein.
2. Der Hauptwert von $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x}$ über $\mathbb{R}$ ist 0.
3. Allgemeiner: falls f eine holomorphe Funktion ist mit einem einfachen Pol bei $p \in \mathbb{R}$, so lässt sich f in einer Umgebung von p schreiben als

   $$f(z) = c_{-1}(z-p)^{-1} + g(z)$$

   für ein g, das holomorph bei p ist. Somit folgt für den Hauptwert von f auf einem genügend kleinen Intervall $I \subset \mathbb{R}$

   $$\int_I f(x)dx = \int_I \frac{c_{-1}}{x-p} dx + \int_I g(x)dx = \int_I g(x)dx.$$

6.24 Lemma. *Sei $R(z)$ eine rationale Funktion, welche außer einfachen Polen $p_1, \ldots, p_n$ keine weiteren Pole auf der x-Achse hat und bei ∞ verschwindet. Entweder es gelte*

1. *$f(z) = R(z)e^{iz}$, oder*
2. *$f(z) = R(z)$ und f verschwindet bei ∞ von 2. Ordnung.*

Dann gilt für den Hauptwert von f über $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{a \text{ ist Pol von } R \text{ mit } \mathrm{Im} a > 0} Res_a f(z) + \pi i \sum_{i=1}^{n} Res_{p_k} f(z).$$

Beweis. Wir wählen einen Integrationsweg $\widetilde{\gamma}_r$ wie im vorigen Lemma, den wir folgt modifizieren. Anstelle des Intervalls $[p_k - \epsilon, p_k + \epsilon]$, $k = 1, \ldots, n$, durchlaufen wir Halbkreise der Form $\gamma_k(t) = p_k + \epsilon e^{i\pi(1-t)}$, $t \in [0, 1]$. Somit folgt

$$2\pi \sum_{\mathrm{Im} a > 0} \mathrm{Res}_a f(z) = \int_{\widetilde{\gamma}_r} f(z)dz = \underbrace{\int_{\gamma_r} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \int_{p_k-\delta}^{p_k+\delta} f(z)dz}_{\to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx} + \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz$$

Außer dem gilt $\int_{\gamma_k} f(z)dz = -\pi i \mathrm{Res}_{p_k} f(z)$ (Übungsaufgabe). $\square$

Manche Integral der Form $\int_0^\infty f(x)dx$ lassen sich aus Symmetriegründen auf die bereits behandelten Fälle zurückführen.

Im folgenden wollen wir Integrale der Form $\int_0^\infty x^\alpha R(x)dx$ untersuchen, wobei $\alpha \in (0,1)$ und R eine rationale Funktion ist, die mit 2. Ordnung bei ∞ verschwindet, bei 0 holomorph ist oder einen Pol erster Ordnung hat, und keine Pole auf der positiven x-Achse hat.

Auf $\mathbb{C}\backslash[0,\infty)\times\{0\} = G$ gibt es eine Argument funktion $\varphi : G \to (0, 2\pi)$. Wir definieren einen Zweig des Logarithmus auf G durch

$$\log z = \ln|z| + i\varphi(z)$$

und eine zugehörige Potenzfunktion $z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$ auf G.

Für r großbetrachten wir eine geschlossene Kurve γ in G, so dass γ zuerst die Strecke von $\frac{i}{r}$ nach $\frac{i}{r} + r$ durchläuft, dann den Kreisbogen $\gamma_r(t) = re^{it}$ (gegen Uhrzeigersinn) von $r + \frac{i}{r}$ nach $r - \frac{i}{r}$, dann die Strecke von $r - \frac{i}{r}$ nach $-\frac{i}{r}$ und zuletzt den kleinen Kreisbogen $\gamma_{\frac{1}{r}}(t) = \frac{1}{r}e^{-it}$ (im Uhrzeigersinn) von $-\frac{i}{r}$ nach $\frac{i}{r}$.

Es sei $f(z) = z^\alpha R(z)$ für eine rationale Funktion R wie eben. Eine Anwendung des Residuensatzes ergibt

$$\int_{i/r}^{r+i/r} f(z)dz + \int_{\gamma_r} f(z)dz + \int_{r+\frac{i}{r}}^{\frac{i}{r}} f(z)dz + \int_{\gamma_{\frac{1}{r}}} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a\neq 0} \mathrm{Res}_a z^\alpha R(z).$$

Da $R(z)$ von 2. Ordnung bei ∞ verschwindet, konvergiert $\int_{\gamma_r} f(z)dz$ gegen 0. In der Tat sehen wir

$$\left|\int_{\gamma_r} z^\alpha R(z)dz\right| \leq L(\gamma_r)r^\alpha \max_{\partial B_r(0)} |R(z)| = 2\pi \underbrace{r^{\alpha+1} \max_{\partial B_r(0)} |R(z)|}_{\to 0 \text{ falls } r\to\infty}.$$

Da $R(z)$ höchstens einen Pol erster Ordnung bei 0 folgt ensprechend, dass $\int_{\gamma_{\frac{1}{r}}} f(z)dz \to 0$ falls $r \to 0$.

Schließlich konvergiert das erste Integral gegen $\int_0^\infty x^\alpha R(x)dx$ und für dass dritte Integral gilt

$$\int_{\beta_r^-} e^{\alpha \log z} R(z)dz \to \int_\infty^0 e^{\alpha(\ln x + 2\pi i)} R(x)dx = -e^{2\pi i\alpha} \int_0^\infty x^\alpha R(x)dx.$$

Wir erhalten somit das folgende Lemma.

6.25 Lemma. *Sei $\alpha \in (0,1)$ und $R(z)$ eine rational Funktion wie eben. Dann gilt*

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x)dx = \left(1 - e^{2\pi i\alpha}\right)^{-1} 2\pi i \sum_{a\neq 0} Res_a z^\alpha R(z).$$

17.01.2023

6.26 Satz (vom Null- und Polstellen zählendene Integral)**.** *Sei f meromorph in einem Gebiet G und nicht identisch Null und sei γ eine Zykel (oder eine geschlossen C^1 Kurve) in G, der keine Nullstelle und keinen Pol von f trifft und eine Teilmenge M berandet. D.h. $n_\gamma(z) = 1$, falls $z \in M$ und $n_\gamma(z) = 0$ falls $z \notin M$. f habe nur endlich viele Pol- und Nullstellen in M. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \widetilde{N}_f - \widetilde{D}_f$$

wobei $\widetilde{N}_f$ die Anzahl der Nullstellen und $\widetilde{D}_f$ die Anzahl der Polstellen von f bezeichnet, jeweils gemäßihrer Vielfachheit.

Beweis. Es sei $z_0 \in N_f \cup D_f \subset G$, wobei N_f und D_f jeweils die Menge der Nullstellen und der Polstellen von f bezeichnet. Aus der Potenz- bzw. Laurentreihenentwicklung von f um z_0 folgt, dass

$$f(z) = (z - z_0)^{k_{z_0}} g(z)$$

für eine holomorphe Funktion g in einer Umgebung um z_0, so dass $g \neq 0$ in dieser Umgebung mit $k_{z_0} \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Im Fall einer Nullstelle ist $k_{z_0} > 0$ und die Ordnung der Nullstelle, im Fall einer Polstelle ist $k_{z_0} < 0$ und $|k_{z_0}|$ gleich der Ordnung der Polstelle. Es folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_{z_0}}{(z - z_0)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

in einer Umgebung von z_0. Somit hat $\frac{f'(z)}{f(z)}$ einen Pol erster Ordnung in z_0. Deshalb gilt

$$\mathrm{Res}_{z_0}\frac{f'}{f} = \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = k_{z_0}\int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{1}{z - z_0}dz = k_{z_0} \quad \text{für } \epsilon > 0 \text{ klein genug.}$$

Aus dem Residuensatz folgt also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z \in N_f \cup D_f} k_z = \widetilde{N}_f - \widetilde{D}_f.$$

□

6.27 Satz (von Rouché)**.** *Seien f und g holomorph in $\Omega \subset \mathbb{C}$ und sei G ein beschränktes Gebiet mit C^1 Rand (d.h. es gibt eine geschlossene, injektive, reguläre C^1 Kurve $\gamma : [a, b] \to \Omega$, so dass $\partial G = \gamma([a, b])$). Falls*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \ \forall z \in \partial G,$$

dann haben f und g mit Vielfachheit gleichviele Nullstellen in G.

Beweis. Betrachte $f_t = (1 - t)f + tg$ für $t \in [0, 1]$. Dann gilt auf ∂G

$$|f_t| \geq |f| - t|f - g| > 0 \text{ auf } \partial G,\ \forall t \in [0, 1].$$

Also trifft γ, die Kurve, die den Rand ∂G parametrisiert, keine Nullstellen von f_t. Die Menge der Nullstellen für jedes f_t ist hat keinen Häufungspunkt in G gemäß Lemma 5.3, aber auch keinen Häufungspunkt auf ∂G, denn sonst gäbe es dort eine Nullstelle von f_t. Da G beschränkt angenommen ist, folgt somit, dass die Anzahl der Nullstellen für jedes f_t endlich ist. Somit können wir den Satz vom Nullstellen zählenden Integral anwenden.

Die Funktion

$$t \in [0,1] \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)} dz = \text{ Anzahl der Nullstellen von } f_t.$$

hängt stetig von $t \in [0,1]$ ab mit Wert in $\mathbb{Z}$. Somit ist der Wert des Integrals konstant für alle t.

Ist die Anzahl der Nullstellen von f und g unendlich, so sind wir bereits fertig. $\square$

6.28 Folgerung (Eine Anwendung des Satzes von Rouché)**.** *Ist h holomorph in U offen, so dass $B_1(0) \subset U$ und $h(\partial B_1(0)) \subset B_1(0)$, dann hat h genau einen Fixpunkt in $B_1(0)$.*

Beweis. Sei $f(z) = h(z) - z$ und $g(z) = -z$. Dann gilt

$$|f(w) - g(w)| = |h(w)| < 1 = |g(w)| \quad \forall w \in \partial B_1(0).$$

Also haben $h(z) - z$ und $-z$ gleichviele Nullstellen in $B_1(0)$, d.h. es gibt genau ein $z_0 \in B_1(0)$ mit $h(z_0) = z_0$. $\square$

Beispiel (Bestimmung des Gaußintegrals mit Residuenkalkül)*.* Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Zunächst gilt für $\varphi(z) = e^{-z^2}$, $z \in \mathbb{C}$, und $a \in \mathbb{C}$

$$\varphi(z) - \varphi(z+a) = e^{-z^2}\left(1 - e^{-2az-a^2}\right) = \varphi(z)\left(1 - e^{-2az-a^2}\right)$$

Die Funktion $\psi(z) = 1 - e^{-2az-a^2}$ hat die Periodizität $\frac{\pi i}{a}$.

Wir wählen nun $a \in \mathbb{C}$ als $a = \sqrt{\pi}e^{i\pi/4}$. Somit gilt $a^2 = \pi i$. Es folgt

$$\psi(z) = 1 - e^{-2az}e^{-a} = 1 - e^{-2az}e^{-i\pi} = 1 + e^{-2az}.$$

Es gilt $\psi(z) = 0$ genau dann, wenn $2az = \pi i + k2\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}$, also genau dann wenn

$$z = z_k = \frac{a}{2} + ka, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Dies sind einfach Nullstellen, denn $\psi'(z_k) \neq 0$. Es folgt

$$\varphi(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} - \frac{\varphi(z+a)}{\psi(z+a)}, \ z \neq z_k.$$

Wir wenden nun auf die meromorphe Funktion $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$ den Residuensatz an.

Wir integrieren $f(z)$ über den Rand des Parallelogramms P mit den Ecken $(\pm R, 0)$ und $(\pm R, 0) + a$. f hat dann genau eine Singularität in P, nämlich bei $z = \frac{a}{2}$. Es gilt $\psi'(a/2) = 2a$. Also folgt

$$\mathrm{res}_{a/2} f = \frac{e^{-a^2/4}}{2a} = \frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi}e^{i\pi/4}} = -\frac{i}{2\sqrt{\pi}}.$$

Für die Integrale entlang der parallelen Kanten von P folgt

$$\int_{-R}^{R} f(z)dz + \int_{R+a}^{-R+a} f(z)dz = \int_{-R}^{R}(f(x) - f(x+a))dx = \int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx \overset{R\to\infty}{\to} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

Für die verbleibenden Kanten wollen wir zeigen, dass die Integrale gegen 0 gehen für $R \to \infty$. Dazu

$$\varphi(\pm R + ta) = e^{-(\pm R+ta)^2} = e^{-R^2(1\pm\frac{ta}{R})^2}.$$

Damit $|\varphi(\pm R + ta)| \leq e^{-\frac{1}{2}R}$ für $R > 1$ hinreichend groß.

Wegen $2a = 2\sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{\pi}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{2\pi}(1+i)$ und $a^2 = \pi i$ folgt

$$\psi(R+ta) = 1 - e^{-2a(R+ta)-a^2} = 1 - e^{-2aR}e^{-2a^2t}e^{-a^2} = 1 - e^{-\sqrt{2\pi}(1+i)R}e^{-t2\pi i}e^{-\pi i}.$$

Somit

$$|\psi(R+ta) - 1| = e^{-\sqrt{2\pi}R} \to 0 \text{ falls } R \to \infty.$$

Also gilt $\psi(R+ta) \to 1$ gleichmässig in t falls $R \to \infty$ und somit $|f(R+ta)| \to 0$.

Andererseits folgt

$$|\psi(-R+ta) - 1| = e^{\sqrt{2\pi}R} \to \infty \text{ gleichmässig in } t$$

und somit $|f(-R+ta)| = |\varphi(-R+ta)/\psi(-R+ta)| \to 0$.

Damit konvergieren die Integrals entlang $t \in [0,1] \mapsto R + ta$ und $t \in [0,1] \to -R + ta$ gegen 0. Aus dem Residuensatz folgt nun

$$\sqrt{\pi} = 2\pi i\left(-\frac{i}{2\sqrt{\pi}}\right) = \int_{\partial P} f(z)dz \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

Ein alternativer Beweis der Formel kann mit Hilfe des Satzes von Fubini und der Transformationsformel gegeben werden:

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy \\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}rd\varphi dr = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = 2\pi(0-(-\frac{1}{2})) = \pi.\end{aligned}$$

7 Der Riemannsche Abbildungssatz

7.1 Definition. Eine bijektive Abbildung $f : G \to \widetilde{G}$ zwischen 2 Gebieten, so dass f und die Umkehrabbildung holomorph sind, heißt konform oder biholomorph. Gibt es eine biholomorphe Abbildung zwischen 2 Gebieten G und $\widetilde{G}$, so heißen G und $\widetilde{G}$ konform äquivalent. Eine biholomorphe Abbildung von einem Gebiet G auf sich selbst heißt Automorphismus. Die Menge der Automorphismen von G sei $\mathrm{Aut}(G)$.

7.2 Lemma. *Sei G ein Gebiet. Eine injektive holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ist biholomorph auf das Bildgebiet $f(G)$.*

Bezeichnung. Eine injektive holomorphe Funktion bezeichnet man auch als schlicht.

Beweis. Das Bild $f(G)$ ist ein Gebiet nach dem Satz von der Gebietstreue. Zu zeigen: die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(G) \to G$ ist holomorph.

Lemma 4.18 sagt: jede holomorphe Funktion g lässt sich in einer Umgebung U einer w-Stelle z_0 schreiben als $g(z) = \varphi(z)^k + w$ für eine biholomorphe Funktion φ auf U. Da f injektive ist, folgt, dass für jedes $w \in f(G)$ eine Umgebung U_w existiert, so dass f die Umgebung $U_w \subset G$ biholomorph auf eine Umgebung $V_w \subset f(G)$ von w abbildet. $f^{-1}|_{V_w}$ ist also holomorph und damit $f^{-1} : f(G) \to G$. $\square$

Beispiele.

1. Die Cayley Abbildung $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ ist eine biholomorphe Abbildung von der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ auf die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = B_1(0)$, denn wir berechnen
$$\begin{aligned}|z-i|^2 = |\mathrm{Re} z + i(\mathrm{Im} z - 1)|^2 = (\mathrm{Re} z)^2 + (\mathrm{Im} z - 1)^2 &= (\mathrm{Re} z)^2 + (\mathrm{Im} z)^2 - 2\mathrm{Im} z + 1 \\ &< (\mathrm{Re} z)^2 + (\mathrm{Im} z)^2 + 2\mathrm{Im} z + 1 = |z+i|^2.\end{aligned}$$
Also ist $|f(z)| < 1$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{H}$. Außerdem ist f holomorph auf $\mathbb{H}$ und eine holomorphe Umkehrabbildung auf $B_1(0)$ ist $f^{-1}(z) = i\frac{1+z}{1-z}$.

2. Andererseits ist $\mathbb{C}$ nicht konform äquivalent zu $\mathbb{E}$, da eine holomorphe Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{E}$ beschränkt wäre und damit nach dem Satz von Liouville konstant.

7.3 Satz (Automorphismen der Einheitskreisscheibe)**.** *Sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$. Dann existiert ein $z_0 \in \mathbb{E}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ (also $\lambda = e^{i\varphi}$ für $\varphi \in \mathbb{R}$), so dass*
$$f(z) = \lambda \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}.$$
Umgekehrt sind alle solchen Abbildungen Automorphismen von $\mathbb{E}$.

Beweis. Sei $z_0, z \in \mathbb{E}$ und $f(z) = \frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}$. Von Aufgabe 1, b) auf dem Übungsblatt 1 wissen wir bereits, dass $f(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$.

Außerdem rechnet man nach, dass $z \in \mathbb{E} \mapsto g(z) = \frac{z-z_1}{1-\overline{z}_1 z}$ mit $z_1 = -z_0$ eine Umkehrabbildung ist. Damit folgt $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ ist biholomorph.

Sei nun f eine Automorphismus von $\mathbb{E}$ mit $f(0) = 0$. Aus dem Lemma von Schwarz folgt $|f(z)| \leq z$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Das gleich gilt aber auch für die Umkehrabbildung, also folgt $|f(z)| = |z|$ und das Lemma von Schwarz liefert, dass f eine Drehung ist, also $f(z) = \lambda z$.

Sei nun f ein beliebiger Automorphismus von $\mathbb{E}$ und sei $f(0) = z_1$. Wir definieren $g(z) = \frac{z - z_1}{1 - \overline{z}_1 z}$. g ist ein Automorphismus von $\mathbb{E}$ und somit auch $h = g \circ f$. Es gilt $h(0) = g(z_1) = 0$. Also ist h eine Drehung $h(z) = \lambda z$ mit $|\lambda| = 1$. Somit folgt

$$f(z) = g^{-1} \circ h(z) = g^{-1}(\lambda z) = \frac{\lambda z + z_1}{1 + \overline{z}_1 \lambda z} = \lambda \frac{z - (-\overline{\lambda} z_1)}{1 - \overline{(-\overline{\lambda} z_1)} z}.$$

□

Frage: Wann sind zwei Gebiete in $\mathbb{C}$ konform äquivalent?

7.4 Definition. Sei G ein Gebiet.

1. Stetige Kurven $\gamma_i : [a, b] \to G$, $i = 0, 1$, mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = x$ und $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = y$ heißen homotop, und wir schreiben $\gamma_0 \sim \gamma_1$, falls es eine stetige Abbildung $h : [a, b] \times [0, 1] \to G$ mit $(t, \tau) \mapsto h(t, \tau)$ gibt, so dass $h(\cdot, 0) = \gamma_0$ und $h(\cdot, 1) = \gamma_1$, und für alle $\tau \in [0, 1]$ gilt $h_\tau(a) = x$ und $h_\tau(b) = y$. Die Abbildung h heißt Homotopie zwischen α und z_0.

2. Ein geschlossener, stetiger Weg $\alpha : [a, b] \to G$ heißt nullhomotop in G, falls es einen Punkt $z_0 \in G$, eine stetige Kurve $\gamma : [c, d] \to G$ von z_0 nach $\gamma(a) = \gamma(b) = x$ und eine stetige Abbildung $h : [a, b] \times [0, 1] \to G$ mit der Eigenschaft, dass $h_1 = \gamma * \alpha * \gamma^-$ und $h(0, \tau) = h(1, \tau) = z_0 \in G$ for all $\tau \in [0, 1]$.

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt einfach zusammenhängend, falls alle geschlossenen, stetigen Wege nullhomotop sind.

Bemerkung. 1. Die Relation $\sim$ zwischen stetigen Kurven mit einem festen Anfangs- (End-)punkt ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen Homotopieklassen.

2. Die Menge der Homotopieklassen geschlossener stetiger Kurven mit festem Anfangspunkt z_0 heißt erste Fundamentalgruppe von G bzgl. z_0. Man schreibt $\pi_1(G, z_0)$. Ein Gebiet G ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, z_0)$ bzgl. einem Punkt z_0 (und damit jedem Punkt) trivial ist, d.h. es gibt darin nur eine Homotopieklasse, nämlich $[\gamma]$ mit $\gamma(t) \equiv z_0$.

Beispiel. Jedes sternförmige Gebiet G ist einfach zusammenhängend, denn es gibt einen Punkt $z_0 \in G$, so dass für jeden Punkt $z \in G$ der Weg $(1 - t)z + t z_0$ in G liegt. Somit liegt für eine beliebige Kurve α die affine Homotopie $h_\tau = (1 - \tau)\alpha + \tau z_0$ in G und ist stetig.

Bemerkung. In Aufgabe 3 auf Übungsblatt 5 hatten wir das Folgende bewiesen. Gibt es eine C^2 Abbildung $(t, \tau) \in [a, b] \times [0, 1] \to h(t, \tau)$, so dass h_τ für jedes τ eine geschlossen Kurve ist und $h(t, 1) = z_0$, dann folgt für die die Kurve $\alpha = h_0$ und jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$, dass

$$\int_\alpha f(z) dz = \int_{h_\tau} f(z) dz = \int_{\{z_0\}} f(z) dz = 0.$$

Leider können wir dies Aussage nicht auf einfach zusammenhängende Gebiet anwenden, da die Homotopie in der Definition 7.4 nur als stetig vorausgesetzt wird. Die Invarianz des Kurvenintegrals gilt aber für stetige Homotopien.

7.5 Satz. *Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und sind zwei stückweise C^1 Kurven γ_0 und γ_1 in Ω homotop, so gilt*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Insbesondere gilt: falls G einfach zusammenhängend, dann gilt für jede geschlossene und stückweise C^1 Kurve γ in G, dass

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Wir beweisen diesen Satz später. Zusammen mit 3.9 Satz folgt nun sofort:

7.6 Folgerung. *Ist G einfach zusammenhängend und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, dann existiert eine Stammfunktion F von f auf G, d.h. $F' = f$.*

7.7 Satz (Riemannscher Abbildungsatz)**.** *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \neq \mathbb{C}$ ist konform äquivalent zu $\mathbb{E}$.*

Bemerkung. Die Voraussetzung, dass das Gebiet einfach zusammenhängend sein muss, ist notwendig: $\mathbb{E}$ ist einfach zusammenhängend und eine biholomorphe Abbildung von einem Gebiet G auf $\mathbb{E}$ existiert, so muss G auch einfach zusammenhängend sein. Fü eine geschlossen Kurve γ in G betrachte man die Homotopie h zwischen $f \circ \gamma = \widetilde{\gamma}$ und 0 in $\mathbb{E}$. Weil f^{-1} stetig ist, ist $f^{-1} \circ h$ eine Homotopie zwischen γ und $f^{-1}(0)$ in G.

24.01.2023

Bevor wir zum Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes kommen, ist unser Ziel zunächst den Satz 7.5 zu beweisen.

7.8 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [a, b] \to \Omega$ stetig. Eine Kreiskette $(B_i)_{i=1,...,n}$ längs γ in Ω ist gegeben durch eine Unterteilung $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$ von $[a, b]$ und Radien $r_0, r_1, \ldots, r_n > 0$, so dass $B_i := B_{r_i}(\gamma(t_i)) \subset \Omega$ und $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset B_{r_{i-1}}(\gamma(t_i)) \cap B_{r_i}(\gamma(t_i))$ $\forall i = 1, \ldots, n$.

7.9 Lemma. *Sei Ω und γ wie in der Definition 7.8. Dann gibt es zu jeder genügend feinen Unterteilung $(t_i)_{i=0,...,n}$ von $[a, b]$ Radien $(r_i)_{i=0,...,n}$, so dass $B_i = B_{r_i}(\gamma(t_i))$ eine KK entlang von γ in U bilden.*

Beweis. O.E. sei $\Omega \neq \mathbb{C}$. Betrache die Abstandsfunktion

$$\epsilon = \inf_{z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, t \in [a,b]} |x - \gamma(t)|.$$

Es gilt $\epsilon > 0$. Sonst gäbe es $z_n \in \mathbb{C} \setminus U$ und $t_n \in [a, b]$ mit $|z_n - \gamma(t_n)| \to 0$. Nach Wahl einer Teilfolge n_i konvergiert $t_{n_i} \to t_\infty$. Außerdem ist x_{n_i} beschränkt, da sonst $|x_{n_i} - \gamma(t_\infty)| \to \infty$. Nach Wahl einer weiteren Teilfolge, die wir auch mit n_i bezeichnen, konvergiert $x_{n_i} \to x_\infty \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Es folgt $|x_\infty - \gamma(t_\infty)| = 0$, also $x_\infty = \gamma(t_\infty)$. Das ist ein Widerspruch, denn $\gamma(t_\infty) \in \Omega$.

Nun ist $\gamma : [a, b] \to \Omega$ gleichmässig stetig. Also gibt es zu $\epsilon/2$ eine $\delta > 0$, so dass $|\gamma(t) - \gamma(t')| < \epsilon$ falls $|t - t'| < \delta$. Für jede Unterteilung $(t_i)_{i=0,...,n}$ von $[a, b]$ mit $|t_{i-1} - t_i| < \delta/2$ folgt deshalb $|\gamma(\tau) - \gamma(t_j)| < \epsilon$ für $\tau \in [t_{i-1}, t_i]$ mit $t_j = t_{i-1}$ oder $t_j = t_i$. Also gilt $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset B_\epsilon(\gamma(t_{i-1})) \cap B_\epsilon(\gamma(t_i))$ und $B_i = B_\epsilon(\gamma(t_i))$ bilden eine Kreiskette längs γ. $\square$

7.10 Definition. Sei $(B_i)_{i=1,...,n}$ eine Kreiskette längs $\gamma : [a, b] \to \Omega$ in Ω und holomorphe Funktionen $f_i : B_i \to \mathbb{C}$ mit $i = 0, \ldots, n$. Wir sagen f_n entsteht aus f_0 durch analytische Fortsetzung entlang der Kreiskette B_i längs γ, falls $f_{i-1}|_{B_{i-1} \cap B_i} = f_i|_{B_{i-1} \cap B_i}$.

7.11 Lemma. *Seien γ und Ω wie zuvor und seien $B_0 = B_{r_0}(\gamma(a))$ und $B = B_r(\gamma(b))$ gegeben. Falls holomorphe Funktionen $g, \widetilde{g} : B \to \mathbb{C}$ aus einer holomorphen Funktion $f : B_0 \to \mathbb{C}$ durch analytische Fortsetzung entlang von Kreisketten $(B_i)_{i=0,...,n}$ und $(\widetilde{B}_j)_{j=0,...,m}$ längs γ hervorgehen (d.h. insbesondere $B_n = \widetilde{B}_m = B$), dann gilt $g = \widetilde{g}$.*

Beweis. Nach Voraussetzung existieren $f_i : B_i \to \mathbb{C}$, $i = 0, \ldots, n$, und $\widetilde{f_j} : \widetilde{B_j} \to \mathbb{C}$, $j = 0, \ldots, m$, mit $f_0 = \widetilde{f_0} = f$, $f_n = g$ und $\widetilde{f_m} = g$.

Behauptung. Wir zeigen für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$ und alle $j \in \{0, \ldots, m\}$, dass $\widetilde{f_j}|_{\widetilde{B_j} \cap B_i} = f_i|_{\widetilde{B_j} \cap B_i}$ für $\widetilde{t_j} \in [t_{i-1}, t_i]$. Dann folgt die Aussage des Lemmas mit $i = n$ und $j = m$.

Beweis der Behauptung per Induktion über $i + j$. Falls $i + j = 0$, so $i = j = 0$. Dann gilt bereits $f_0|_{\widetilde{B}_0 \cap B_0} = \widetilde{f_1}|_{\widetilde{B}_0 \cap B_0} = f|_{\widetilde{B}_0 \cap B_0}$.

Sei nun $\widetilde{t_j} \in [t_{i-1}, t_i]$ mit $i + j = k$ und die Behauptung sei bereits bewiesen für $i + j \leq k - 1$.

1. Fall: Falls $\widetilde{t}_{j-1} \in [t_{i-1}, t_i]$, dann folgt aus der Induktionsannahme $f_i|_{\widetilde{B}_{j-1}\cap B_i} = \widetilde{f}_{j-1}|_{\widetilde{B}_{j-1}\cap B_i}$. Somit auch

$$f_i|_{\widetilde{B}_{j-1}\cap\widetilde{B}_j\cap B_i} = \widetilde{f}_{j-1}|_{\widetilde{B}_{j-1}\cap\widetilde{B}_j\cap B_i} = \widetilde{f}_j|_{\widetilde{B}_{j-1}\cap\widetilde{B}_j\cap B_i}$$

und daher $f_i|_{\widetilde{B}_j\cap B_i} = \widetilde{f}_j|_{\widetilde{B}_j\cap B_i}$ nach dem Identitätssatz.

2. Fall: $\widetilde{t}_{j-1} \leq t_{i-1} \leq \widetilde{t}_j$. Das gleich Argument wie im ersten Fall funktioniert hier, wobei die Rollen von j und i vertauscht werden müssen. □

7.12 Lemma. *Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ stetig, B_0 ein offener Ball um $\gamma(a)$ und $F_0 : B_0 \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f auf B_0. Dann ist F_0 analytisch fortsetzbar entlang von Kreisketten längs γ. Ist $F_n : B_n \to \mathbb{C}$ duch analytische Fortsetzung von F_0 entlang einer KK enstanden, wobei B_n ein Ball in $\gamma(b)$ ist, so ist F_n auch eine Stammfunktion von f auf B_n.*

Beweis. Sei $(B_i)_{i=0,\dots,n}$ eine KK längs γ. Wir wählen eine Folge holomorpher Funktionen $\widetilde{F}_i : B_i \to \mathbb{C}$, so dass $\widetilde{F}_i' = f$ auf B_i und $\widetilde{F}_0 = F_0$ auf B_0. Es gilt $\widetilde{F}_{i+1} = \widetilde{F}_i - c_i$ auf $B_i \cap B_{i+1}$ für ein $c_i \in \mathbb{C}$. Definiere deshalb $F_{i+1} = \widetilde{F}_{i+1} + \sum_{l=1}^{i} c_k$ auf B_{i+1} für $i = 0, \dots, n-1$. F_i ist somit die gesuchte analytische Fortsetzung.

Nun nehme an, dass $F = \hat{F}_m : \hat{B}_m \to \mathbb{C}$ duch analytische Fortsetzung aus F_0 hervorgeht. $\hat{B}_m$ ein Ball um $\gamma(b)$ ist. Dann gilt wegen Lemma 7.11, dass $\hat{F}_n = F_n$ auf $\hat{B}_m \cap B_n$ wobei F_n wie zuvor. Es gilt bereits $F_n' = f$ auf $B_n \cap \hat{B}_m$. Falls $\hat{B}_m \subset B_n$, so folgt bereits $\hat{F}_n' = f$ auf $\hat{B}_m$. Falls $B_n \subset \hat{B}_m$, dann wählen wir G auf $\hat{B}_m$ mit $G' = f$ und somit $G = \hat{F}_m + d$ auf B_n. Wegen dem Identitätssatz folgt aber schon $G = \hat{F} + d$ auf $\hat{B}_m$. □

Bemerkung. Falls $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise C^1 und F_n die analytische Fortsetzung entlang einer Kreiskette längs γ von einer Stammfunktion F_0 auf $B_0 = B_r(\gamma(a))$ ist, so gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = F_n(\gamma(b)) - F_0(\gamma(a)).$$

Dazu sei $a = t_0 \leq \dots \leq t_n = b$ eine Unterteilung von $[a,b]$ fein genug, so dass $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ C^1 und (B_i) eine zugehörige Kreiskette, so dass F_n aus F_0 durch analytische Forsetzung entlang dieser Kreiskette hervorgeht. Dann folgt

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \left(F_i(\gamma(t_i) - F_i(\gamma(t_{i-1}))\right) = F_n(\gamma(b)) - F_0(\gamma(a)).$$

7.13 Definition (Integration entlang stetiger Wege)**.** Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a,b] \to \Omega$ stetig. Dann definieren wir

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F_0(\gamma(a))$$

wenn F duch analytische Fortsetzung einer Stammfunktion F_0 auf B hervorgeht, wobei B ein Ball um den Anfangspunkt ist.

Bemerkung. 1. Das Integral ist wohldefiniert, denn sind $\widetilde{F_0}$ und $\widetilde{F}$ andere Wahlen von Stammfunktionen wie in der Definition, so gilt $\widetilde{F_0}|_{B\cap\widetilde{B}} = F_0|_{B\cap\widetilde{B}} + c$. Dann sind $\widetilde{F}$ und $F + c$ beides analytische Fortsetzung von $\widetilde{F_0}$ und stimmen wegen der Eindeutigkeit auf einem Ball um $\gamma(b)$ überein. Also gilt auch $F(\gamma(b)) - F_0(\gamma(a)) = \widetilde{F}(\gamma(b)) - \widetilde{F_0}(\gamma(a))$.

2. Gemäss der Definition hängt das Integral bis auf das Vorzeichen nicht von der Durchlaufrichtung ab, und man zeigt auch, dass es nicht von der Parametrisierung abhängt, dann ist f eine analytische Fortsetzung von f_0 längs γ, so auch längs $\gamma \circ \varphi$ für eine stetige Umparametrisierung $\varphi : [\widetilde{a}, \widetilde{b}] \to [a, b]$.

Frage: Wie hängt die analytische Fortsetzung f von f_0 längs einer stetigen Kurve γ von der Kurve γ ab?

7.14 Satz (Monodromiesatz)**.** *Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetige Wege mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = x$ und $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = y$, und $h : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 mit festen Anfangs- und Endpunkten. Sei B eine Ball um den Punkt x und $f_0 : B \to \mathbb{C}$ holomorph. f_0 lasse sich für jedes τ entlang von Kreisketten längs $h(\cdot, \tau)$ analytisch fortsetzen. Dann gilt: Sind f und $\widetilde{f}$ analytische Fortsetzungen von f längs $\gamma_0 = h(\cdot, 0)$ und $\gamma_1 = h(\cdot, 1)$, so gilt $f = \widetilde{f}$.*

26.01.2023

Beweis von Satz 7.14. Seien f^τ die analytischen Fortsetzungen von f_0 längs $h(\cdot, \tau)$. Jedes f^τ hat eventuell einen anderen Ball um y als Definitionsbereich. Deshalb betrachten wir die Taylorreihe $T(\tau)$ von f^τ um y, die unabhängig ist vom Definitionsbereich.

Behauptung: Sei $\tau_0 \in [0,1]$ beliebig. Wir zeigen : Es gibt $\delta > 0$, so dass $T(\tau) = T(\tau_0)$ für $|\tau - \tau_0| < \delta$. Damit folgt $\{\tau \in [0,1] : T(\tau) = T(0)\} \neq \emptyset$ und $\{\tau \in [0,1] : T(\tau) \neq T(0)\}$ sind offen in $[0,1]$. Da $[0,1]$ zusammenhängend ist, folgt $\{\tau : T(\tau) \neq T(0)\} = \emptyset$, und damit die Aussage des Satzes.

Zwischenbehauptung: Falls $C \subset B_r(z)$ kompakt, dann existiert $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(C) \subset B_{r-\epsilon}(\widetilde{z}) \subset B_r(z)$ für alle $\widetilde{z} \in B_r(z)$ mit $|z - \widetilde{z}| < \epsilon$.

In der Tat, falls $\epsilon \leq \frac{1}{3}m$ mit $m = \min_{x \in C, y \in \mathbb{C} \setminus B_r(z)} |x - y|$, dann folgt für $y \in B_\epsilon(C)$, $\widetilde{z} \in B_\epsilon(z)$ und $c \in C$:

$$|\widetilde{z} - y| \leq |z - \widetilde{z}| + |z - c| + |c - y| \leq r - m + 2\epsilon = r - \epsilon.$$

Wir erhalten die Zwischenbehauptung.

Wir wenden die Zwischenbehauptung nun an auf die Bälle $B_i = B_{r_i}(h(t_i, \tau_0))$ einer Kreiskette längs $h(\cdot, \tau_0)$ also $z = h(t_i, \tau_0)$ und auf $C = h([t_{i-1}, t_{i+1}], \tau_0)$ für $i = 0, \dots, n$ wobei $t_{-1} = a$ und $t_{n+1} = b$ gesetzt werden.

Die Abbildung h ist stetig auf dem Kompaktum $[a,b] \times [0,1]$ also gleichmässig stetig. Zu $\epsilon > 0$ existiert deshalb ein $\delta > 0$, so dass $|h(t,\tau) - h(t, \tau_0)| < \epsilon$ für alle τ mit $|\tau - \tau_0| < \delta$.

Wähle $\epsilon = \frac{1}{3} \min_{i=0,\dots,n} m_i$ wobei m_i wie in der Zwischenbehauptung. Insbesondere also $\epsilon \leq \frac{1}{3} m_i \; \forall i = 0, \dots, n$. Dann folgt aus der Zwischenbehauptung $B_\epsilon(h([t_{i-1}, t_{i+1}], \tau_0)) \subset B_{r_i - \epsilon}(h(t_i, \tau))$ und somit auch $h([t_{i-1}, t_{i+1}], \tau) \subset B_{r_i - \epsilon}(h(t_i, \tau)$. Also definiert $B_i^\tau = B_{r_i - \epsilon}(h(t_i, \tau))$ eine Kreiskette längs $h(\cdot, \tau)$ entlang der wir f_0 analytisch fortsetzen können. Gleichzeitig ist aber jedes $B_i^\tau \subset B_i$ und somit gilt wegen dem Identitätsatz, dass $T(\tau) = T(\tau_0)$. Dies zeigt die Behauptung und der Satz ist bewiesen. □

Also Folgerung können wir einen Beweis von Satz 7.5 angeben.

Beweis von Satz 7.5. Seien γ_0, γ_1 stückweise C^1 in Ω Wege und sei h eine stetige Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 in Ω. Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph.

Wir wählen eine Stammfunktion F_0 von f auf einem Ball B um $\gamma_0(a) = \gamma_1(b) = x$. F_0 lässt sich längs jeder Kurve $h(\cdot, \tau)$ analytisch fortsetzen zu einer Stammfunktion F^τ von f auf einem Ball um $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = y$. Wegen dem Monodromiesatz gilt dass $F^0 = F^1 = F$. Deshalb folgt

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

□

7.15 Folgerung. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $0 \notin G$. Es existiert ein komplexer Logarithmus auf G, d.h. es existiert $l : G \to \mathbb{C}$, so dass $\exp \circ l(z) = z$ für $z \in G$.*

Beweis. Übungsaufgabe, Blatt 13. □

Nach Voraussetzung im Riemannschen Abbildungsatz gilt $G \neq \emptyset$ und $G \neq \mathbb{C}$. Also existiert $z_0 \notin G$ und nach Anwendung einer Translation in $\mathbb{C}$ können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $0 \notin G$. Mit Hilfe der Logarithmusfunktion l können wir eine Wurzelfunktion $\sqrt{z} = \exp(\frac{1}{2}l(z))$ auf G definieren.

7.16 Lemma. *Die Wurzel $\sqrt{z}$ ist injektiv und es existiert $B_r(w_0) \subset \mathbb{C}\backslash\sqrt{G}$.*

Beweis. Aus $\sqrt{z_1} = \sqrt{z_2}$ folgt $z_1 = (\sqrt{z_1})^2 = (\sqrt{z_2})^2 = z_2$. Also ist $\sqrt{z}$ injektiv. Falls $w, -w \in \sqrt{G}$, dann existieren $z_1, z_2 \in G$ mit $\sqrt{z_1} = -\sqrt{z_2}$. Daraus folgt wieder $z_1 = z_2$, also $\sqrt{z_1} = -\sqrt{z_1}$, also $z_1 = 0$ und $w = 0$. Das ist ein Widerspruch zu $0 \notin G$.

Also können niemals ein Wert w und sein Negatives $-w$ im Bild von $\sqrt{z}$ liegen. Für ein $B_r(w) \subset \sqrt{G}$ ist also $B_r(-w) \subset \mathbb{C}\backslash f(G)$. Somit wähle wir w_0 als $-w$ in der Aussage des Lemmas. $\square$

Soweit haben wir also eine injektive holomorphe Funktion f konstruiert von G nach $f(G)$ mit $B_r(w_0) \subset \mathbb{C}\backslash f(G)$. Durch Verknüpfung mit einer weiteren Verschiebung können wir nun wieder annehmen, dass $0 = w_0$. Außerdem können wir nach Multiplikation mit $\frac{1}{r}$ annehmen, dass $B_1(0) \subset \mathbb{C}\backslash f(G)$. Durch Anwedung der holomorphen Funktion $\frac{1}{z}$ erhalten wir schließlich eine injektive holomorphe Funktion von G nach $\mathbb{E}$.

Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass $G \subset \mathbb{E}$.

Ein weiteres Hilfsmittel für den Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes ist der folgende Satz.

7.17 Satz (Satz von Montel)**.** *Jede lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen $f_i : G \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet G besitzt eine Teilfolge, die lokal gleichmässig gegen eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert.*

Die Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ heißt lokal beschränkt, wenn zu jedem $z_0 \in G$ eine Umgebung U und ein $C > 0$ existiert, so dass $|f_i(z)| \leq C$ für alle $z \in U$ und für alle $i \in \mathbb{N}$.

Beweis. **1.** Wähle eine abzählbar und dichte Teilmenge $\{a_1, a_2, \dots\}$ in G. Da f_i lokal beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge $f_{i_j^1}$ von f_i, so dass $f_{i_j^1}(a_1)$ konvergiert. Weiter gibt es eine Teilfolge $f_{i_j^2}$ von $f_{i_j^1}$, so dass $f_{i_j^2}(a_1)$ konvergiert. Induktiv erhalten wir also für jedes $n \in \mathbb{N}$ Teilfolgen $f_{i_j^n}$, die bei a_n konvergieren. Wir betrachten die Diagonalfolge $f_{i_n^n}$ welche eine Teilfolge von f_i ist und nun konvergiert für jedes $a_k, k \in \mathbb{N}$. Wir bezeichen diese Teilfolge mit f_n.

31.01.2023

2. Wir zeigen $f_n : G \to \mathbb{C}$ konvergiert lokal gleichmässig gegen eine Funktion f. Mit dem Konvergenzsatz von Weierstraß (Satz 4.13) ist f somit holomorph und alle Ableitungen konvergieren ebenfalls lokal gleichmässig.

Sei $z_0 \in G$ und $B_r(z_0) \subset U_{z_0}$, d.h. $|f_n(z)| \leq C \ \forall z \in B_r(z_0)$.

Dann gilt für $z, z' \in B_{r/2}(z_0)$:

$$
\begin{aligned}
|f_n(z) - f_n(z')| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z} - \frac{f(w)}{w-z'} dw \right| \\
&= \frac{|z-z'|}{2\pi} \left| \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z)(w-z')} dw \right| \leq \frac{|z-z'|}{2\pi} 2\pi r \frac{C}{r^2} 4 = \frac{4C}{r} |z-z'|.
\end{aligned}
$$

Sei nun $\epsilon > 0$ und $\delta = \frac{r}{2}$. Wähle endliche viele $a_{k_1}, \dots, a_{k_N} \in \{a_1, a_2, \dots\}$, so dass für jedes $z \in B_\delta(z_0)$ ein a_{k_j} existiert mit $|a_{k_j} - z| < \frac{\epsilon}{3} \frac{r}{4C}$. Die Wahl dieser Punkte a_{k_j} in $\{a_1, a_2, \dots\}$ ist möglich wegen Dichtheit in G ist.

Außerdem wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n(a_{k_j}) - f_m(a_{k_j})| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $n, m \geq n_0$ und alle $j = 1, \dots, N$.

Dann folgt für alle $z \in B_\delta(z_0)$ und ein a_{k_j}, so dass $|z - a_{k_j}| < \frac{\epsilon}{3} \frac{r}{4C}$:

$$
|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f_n(a_{k_j})| + |f_n(a_{k_j}) - f_m(a_{k_j})| + |f_m(a_{k_j}) - f_m(z)| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}.
$$

Damit konvergiert f_n lokal gleichmässig auf $B_\delta(z_0)$ gegen eine stetige Funktion f. □

Im Beweis des Riemannschen Abbildungsatzes haben wir soweit gezeigt, dass es reicht $G \subset \mathbb{E}$ anzunehmen. Außerdem erreichen wir durch die Anwendung eines Automorphismus von $\mathbb{E}$, dass wieder $0 \in G$ (im Gegensatz zu der früheren Annahme).

7.18 Lemma. *Falls $f : G \subset \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ schlicht ist mit $f(0) = 0$ und nicht surjektiv, so gibt es eine schlichte Funktion $F : G \to \mathbb{E}$ mit $F(0) = 0$ und $|F'(0)| > |f'(0)|$.*

Insbesondere folgt also: Falls $|f'(0)| \geq |F'(0)|$ für alle $F : G \to \mathbb{E}$ mit $F(0) = 0$, dann ist f surjektiv.

Beweis. Sei $f : G \to \mathbb{E}$ wie in der Aussage des Lemmas. Dann existiert $z_0 \in \mathbb{E} \backslash f(G)$. Sei $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ ein Automorphismus von $\mathbb{E}$ auf sich gegeben durch

$$
\varphi(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z},
$$

so dass $\varphi(z_0) = 0 \in G$. Die Wahl von φ impliziert also, dass $0 \notin \varphi \circ f(G)$.

Außerdem ist das Bild $f(G) = \widetilde{G}$ einfach zusammenhängend, da f biholomorph auf sein Bild und damit ein Homöomorphismus ist. Also finden wir wieder eine Logarithmusfunktion und ein zugehörige holomorphe Wurzelfunktion $\sqrt{z}$ auf $\widetilde{G}$, so dass $\sqrt{\widetilde{G}} \subset \mathbb{E}$.

Sei nun $z_1 = \sqrt{-z_0} = \sqrt{\varphi(0)} = \sqrt{\varphi(f(0))}$. z_1 ist also das Bild der 0 unter der Abbildung $\sqrt{\cdot} \circ \varphi \circ f : G \to \mathbb{E}$.

Sei dann φ_1 der Automorphismus von $\mathbb{E}$, so dass $\varphi_1(z_1) = 0$, also

$$
\varphi_1(z_1) = \frac{z - z_1}{1 - \overline{z}_1 z}.
$$

Die Verknüpfung $F = \varphi_1 \circ \sqrt{\cdot} \circ \varphi \circ f : G \to \mathbb{E}$ ist dann holomorph und injektiv, also schlicht, mit $F(0) = 0$. Andererseits ist durch $\varphi^{-1} \circ (\cdot)^2 \circ \varphi_1^{-1} = h$ eine holomorphe Abbildung von $\mathbb{E}$ auf sich gegeben mit $h(0) = 0$, so dass $h \circ F = f$ gilt. Nach dem Schwarz'schen Lemma gilt $|h'(0)| < 1$, da h keine Drehung von $\mathbb{E}$ ist. Also folgt

$$|f'(0)| = |h'(0) \cdot F'(0)| < |F'(0)|$$

und $F : G \to \mathbb{E}$ ist die gesuchte holomorphe Abbildung. □

7.19 Lemma. *$\exists f : G \to \mathbb{E}$ schlicht mit $f(0) = 0$ und $|f'(0)|$ maximal.*

Beweis. Aus der Taylorformel folgt

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{f(z)}{z^2} dz.$$

Mit der Standardabschätzung für Kurvenintegrale folgt dann also auch

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi\epsilon \frac{1}{\epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon}$$

also existiert das Supremum

$$s_0 = \sup\{|f'(0)| : f : G \to \mathbb{E} \text{ schlicht } f(0) = 0\}.$$

Wir wählen also eine maximierende Folge $f_i : G \to \mathbb{E}$, d.h. $|f_i'(0)| \to s_0$.

Die Folge f_i ist beschränkt durch 1, also folgt mit dem Satz von Montel: es gibt eine lokal gleichmässig konvergente Teilfolge gegen eine holomorphe Funktion f. Es folgt sofort, dass $f(0) = 0$ und wegen der Konvergenz der Ableitungen auch, dass $f'(0) = s_0$. Insbesondere ist f nicht konstant.

Es bleibt zu zeigen, dass $f : G \to \mathbb{E}$ injektiv ist.

Sei dazu $w \in f(G)$. Ohne Einschränkung sei $w = 0$, indem wir f durch $f - w$ ersetzen. Angenommen $\exists z, z' \in G$ mit $f(z) = f(z') = w$, aber $z \neq z'$. Wir wählen nun $r > 0$, so dass $B_r(z) \subset G$ und es gibt keine weiteren Nullstellen von f in $B_r(z)$. Außerdem gilt, dass f_i lokal gleichmässig gegen f konvergiert. Nachdem wir r etwas verkleinert haben, konvergiert f_i also gleichmässig auf $\overline{B_r(z)}$ gegen f. Insbesondere gibt es also ein $\delta > 0$ grösser 0, so dass $|f| > \delta$ und $|f_i - f| < \delta$ auf ∂G. Nach dem Satz von Rouché hat f_i also genau die gleiche Anzahl an Nullstellen wie f in $B_r(z)$, nämlich eine. Das gleiche Argument liefert aber eine weitere Nullstelle von f_i in einer Umgebung von z'. Das ist ein Widerspruch zur Injektivität von f_i. □

Ende des Beweises des Riemannschen Abbildungssatzes. Mit dem Lemma 7.18 folgt, dass die Funktion $f : G \to \mathbb{E}$, die wir in Lemma 7.19 konstruiert haben, surjektiv ist. Damit haben wir eine biholomorphe Abbildung zwischen G und $\mathbb{E}$ gefunden. □