

Aufgabe 1

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene:

1. $A = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 \leq 2 \text{ und } 0 \leq \text{Im}(z) \leq 1\}$,
2. $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3 + i| < 4 \text{ oder } \text{Re}(iz) \leq 1\}$.

Aufgabe 2

Beweisen Sie folgende Aussagen über komplexe Zahlen $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$, aus der Vorlesung:

1. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$,
2. $|\overline{z}| = |z|$
3. $\text{Re}z = \frac{z + \overline{z}}{2}$ und $\text{Im}z = \frac{z - \overline{z}}{i2}$.
4. $|\text{Re}z| \leq |z|$ und $|\text{Im}z| \leq |z|$
5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
6. $z_1 \overline{z_2} = \langle z_1, z_2 \rangle - i \det(z_1, z_2)$ wobei $(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$.