Aufgabe 1 (4 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$.

1. Beschreiben Sie die Bilder der Geraden $x = a$ und $y = b$. Zeichnen Sie ein Bild für geeignete Werte von a und b.

2. Es sei $\mathrm{Re} f = u$ und $\mathrm{Im} f = v$. Beschreiben Sie die Urbilder der Geraden $u = c$ und $v = d$. Zeichnen sie ein Bild für geeignente Werte von c und d.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie: Die folgenden Aussagen für $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind äquivalent.

   1. f is anti-holomorph
   2. $z \mapsto f(\overline{z})$ ist holomorph,
   3. f ist total differenzierbar in jedem Punkt $z \in \Omega$ und auf Ω gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ reell total differenzierbar. Beweisen Sie oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Wenn f in allen Punkten $z \in \Omega$ zugleich holomorph und anti-holomorph ist, dann ist f konstant.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen und $C^1(U, V)$ holomorph. Zeigen Sie:

(a) Hat f eine Umkehrabbildung $g \in C^1(V, U)$, so ist diese holomorph und es gilt

$$g'(f(z))f'(z) = 1 \quad \text{für alle } z \in U.$$

(b) Ist $f'(z_0) \neq 0$, so gibt es Umgebungen U' von z_0 und V' von $w_0 = f(z_0)$, so dass $f(U') \subset V'$ und $f|_{U'} : U' \to V'$ hat eine holomorphe Umkehrabbildung.

Abgabe bis Donnerstag, 3. November, 12 Uhr, in dem dafür vorgesehenen Briefkasten im Mathematischen Institut.