
Aufgabe 1 (4 Punkte)
Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konvergiere in $B_R(0)$ mit $R > 0$ und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|2z| < R$ gelte $f(2z) = (f(z))^2$. Zeigen Sie: Ist $a_0 \neq 0$, so folgt $f(z) = \exp(a_1 z)$ für $z \in B_R(0)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, so dass $P(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in (-R, R)$. Zeigen Sie $a_k \in \mathbb{R}$ und $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$ für alle $z \in B_R(0)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Sei $l : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: l ist eine Logarithmusfunktion genau dann, wenn $l'(z) = \frac{1}{z}$ in G und es existiert ein a mit $\exp(l(a)) = a$.
Hinweis: Leiten Sie $g(z) = z\exp(-l(z))$ ab und verwenden Sie eine Aussage aus der Vorlesung.

(b) Es seien $u(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}$ und $v(x, y) = \arctan\frac{y}{x}$ für $x > 0$, wobei $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die reelle Arcustangensfunktion ist. Zeigen Sie, dass $f = u + iv$ holomorph ist und berechnen Sie die Ableitung.

(c) Finden Sie für die Reihe
$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - z)^k$$
eine holomorphe Funktion g, so dass $g'(z) = P(z)$ mit $g(1) = 0$.

Abgabe bis Mittwoch, 9. November, 16 Uhr, in dem dafür vorgesehenen Briefkasten im Mathematischen Institut.