Übung zur Funktionentheorie — Wintersemester 2022/23, Blatt 4

Dr. Christian Ketterer, Marius Amann — 30. August 2023

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) *Partielle Integration.* Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ ein stückweiser C^1 Weg, $f, h : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, und F, H Stammfunktionen zu f bzw. h. Zeigen Sie:

$$\int_\gamma F(z)h(z)dz = F(\gamma(b))H(\gamma(b)) - F(\gamma(a))H(\gamma(a)) - \int_\gamma f(z)H(z)dz.$$

(b) *Transformationsformel.* Seien $\Omega, V \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ ein stückweiser C^1 Weg, $\phi : \Omega \to V$ komplex differenzierbar mit ϕ' stetig, und $f : V \to \mathbb{C}$ stetig. Zeigen Sie: $\phi \circ \gamma : [a,b] \to V$ ist ein C^1 Weg und

$$\int_\gamma f \circ \phi(z)\phi'(z)dz = \int_{\phi\circ\gamma} f(z)dz.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\} = \mathbb{C}^\times$ ein Weg in Polardarstellung in Bezug auf $z_0 \in \mathbb{C}$, d.h.

$$\gamma(t) = z_0 + r(t)e^{i\phi(t)} \quad \text{mit } r, \phi \in C^1([a,b]),\ r(t) > 0.$$

Zeigen Sie: Falls γ geschlossen ist, gilt die Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}dz = \frac{1}{2\pi}\left(\phi(b) - \phi(a)\right) \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $U_i, i = 1, 2$, Gebiete in $\mathbb{C}$ und $f : U_1 \cup U_2 \to \mathbb{C}$ sei stetig. Es gelt jeweils für $i = 1, 2$, dass

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a,b] \to U_i$.

Zeigen Sie: Ist $U_1 \cap U_2$ zusammenhängend, so ist das Kurvenintegral auch 0 über jeden geschlossenen Weg γ in $U_1 \cup U_2$. Geben Sie ein Gegenbeispiel, falls $U_1 \cap U_2$ nicht zusammenhängend ist.

Abgabe bis Mittwoch, 16. November, 16 Uhr, in dem dafür vorgesehenen Briefkasten im Mathematischen Institut.