
Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $G = \mathbb{C} \backslash [0,1] \times \{0\}$. Zeigen Sie

$$\int_\gamma \frac{1}{z(z-1)} dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a,b] \to G$.
Hinweis: Find Sie eine Stammfunktion. Führen Sie dazu zunächst eine Partialbruchzerlegung durch.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeigen Sie die *Fresnelschen Formeln*

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Hinweis: Betrachten Sie das Kurvenintegral der Funktion $f(z) = e^{iz^2}$, $z \in \mathbb{C}$, entlang des Weges $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3$, wobei γ_1 die Strecke von 0 nach $R \in \mathbb{R}_{>0}$, γ_2 den Kreisbogen um 0 von R nach $\frac{R(1+i)}{\sqrt{2}}$ und γ_3 die Strecke von $\frac{R(1+i)}{\sqrt{2}}$ nach 0 parametrisiert. Verwenden Sie

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma \in C^2([a,b] \times [0,1], G)$. Wir betrachten γ als eine Schar von parametrisierten Kurven $\gamma_t : [a,b] \to G$, $\gamma(\cdot, t) = \gamma_t(\cdot)$. Zeigen Sie

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma(b,\cdot)} f(z) - \int_{\gamma(a,\cdot)} f(z) dz.$$

Folgern Sie, dass die Kurvenintegrale einer solche Schar $(\gamma_t)_{t \in [0,1]}$ von Kurven, die feste Anfangs- und Endpunkten unabhängig von $t \in [0,1]$ haben oder geschlossen sind, alle gleich sind (*homotopie-invariant*).
Hinweis: Differenzieren Sie das Kurvenintegral von f nach t und wenden Sie partielle Integration an.

Bonusaufgabe (4 Punkte)
Beschreiben Sie einen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, der die Ellipse

$$\{x + iy \in \mathbb{C} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}, \quad a, b \in \mathbb{R}_{>0},$$

parametrisiert. Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \frac{1}{z} dz$ und leiten Sie daraus ab, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \frac{2\pi}{ab}.$$

Abgabe bis Mittwoch, 23. November, 16 Uhr, in dem dafür vorgesehenen Briefkasten im Mathematischen Institut.