Übung zur Funktionentheorie | Wintersemester 2022/23, Blatt 6
Dr. Christian Ketterer, Marius Amann | 30. August 2023

Aufgabe 1 *(Verallgemeinerter Satz von Liouvillle)* (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Es gebe $\alpha \geq 0$ und $0 < M < \infty$ mit

$$|f(z)| \leq M|z|^\alpha \quad \text{für } |z| \text{ hinreichend groß.}$$

Zeigen Sie: f ist eine Polynome vom Grad $k \leq \alpha$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante, ganze Funktion. Zeigen Sie:

(a) $f(\mathbb{C})$ ist dicht in $\mathbb{C}$.

(b) $f(\mathbb{C}) \cap \partial D_1(0) \neq \emptyset$.

(c) Ist $f(z)$ kein Polynom, so ist $f(\mathbb{C} \backslash D_R(0))$ dicht in $\mathbb{C}$ für jedes $R < \infty$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Berechnen sie mit Hilfe der Cauchy Integralformel folgende Integrale:

(a) $\int_{\partial B_2(0)} \frac{e^z dz}{(z+1)(z-3)^2}$.

(b) $\int_{\partial B_2(0)} \frac{\sin z}{z+i} dz$.

Abgabe bis Mittwoch, 30. November, 16 Uhr, in dem dafür vorgesehenen Briefkasten im Mathematischen Institut.