
Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \times [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig. Zeigen Sie: Ist $f(\cdot, t)$ holomorph für alle $t \in [a, b]$, so ist die Funktion

$$F : \Omega \to \mathbb{C},\ F(z) = \int_a^b f(z, t)dt,$$

ebenfalls holomorph. *Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Morera.*

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Betrachten Sie auf $\mathbb{S}^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1\}$ die Euklidische Metrik $d(x, y) = |x - y|$. Die *Stereographische Projektion vom Südpol* ist

$$\phi_+ : \mathbb{S}^2 \to \hat{\mathbb{C}},\ \phi_+(x) = \begin{cases} \frac{x_1 + ix_2}{1 + x_3} & \text{für } x \neq (0, 0, -1), \\ \infty & \text{für } x = (0, 0, -1). \end{cases}$$

Berechnen Sie $\phi_+^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^2$ und zeigen Sie, dass ϕ_+ und ϕ_+^{-1} stetig sind, wobei $\hat{\mathbb{C}}$ mit der Topologie aus der Vorlesung ausgestattet ist. Folgern Sie, dass $\hat{\mathbb{C}}$ mit dieser Topologie kompakt ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien $\phi_\pm : S_\pm \to \mathbb{C}$ wobei $S_\pm = \mathbb{S}^2 \backslash \{(0, \mp 1)\}$ und

$$\phi_+(x) = \frac{x_1 + ix_2}{1 + x_3} \text{ und } \phi_-(x) = \frac{x_1 - ix_2}{1 - x_3}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\phi_- \circ \phi_+^{-1}(z) = \frac{1}{z} = \phi_+ \circ \phi_-^{-1}(z)$ für $z \in \mathbb{C}$.

(b) $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ heißt komplex differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{S}^2$, falls $\alpha, \beta \in \{\pm\}$ existieren mit $x_0 \in S_\alpha$ und $f(x_0) \in S_\beta$ und

$$\phi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} \text{ ist komplex differenzierbar in } z_0 = \phi_\alpha(x_0).$$

Zeigen Sie, dass dieser Begriff nicht von der Wahl von α, β abhängt.

(c) Zeigen Sie, dass gebrochen rationale Funktionen komplex differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{S}^2$ induzieren.

Abgabe bis Mittwoch, 7. Dezember, 16 Uhr, in dem dafür vorgesehenen Briefkasten im Mathematischen Institut.