Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $c \in \Omega$ eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f : \Omega \backslash \{c\} \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie für die Laurentreihe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-c)^\nu$$

von f um c:

1. c ist hebbar genau dann, wenn $a_\nu = 0 \ \forall \nu < 0$,
2. c ist ein Pol der Ordnung m genau dann, wenn $a_\nu = 0 \ \forall \nu < -m$ und $a_{-m} \neq 0$,
3. c ist eine wesentliche Singularität genau dann, wenn $a_\nu \neq 0$ für unendlich viele $\nu < 0$.

Aufgabe 2 *(Regel von Hospital)* (4 Punkte)
Seien f, g in einer punktierten Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph, und z_0 sei eine k-fache Nullstelle von f und g (bzw. k-fache Polstelle von f und g). Zeigen Sie:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f^{(k)}(z)}{g^{(k)}(z)},$$

und z_0 ist hebbare Singularität von f/g.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Laurentreihe der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z-3)^2} \quad \text{auf } A_{1,2}(0).$$

(b) Berechnen Sie den Hauptteil der Laurentreihe von

$$f(z) = \frac{z-1}{(\sin z)^2} \quad \text{auf } A_{0,\pi}(0).$$

(c) Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k (z+2)^k.$$

Abgabe bis Mittwoch, 14. Dezember, 16 Uhr, in dem dafür vorgesehenen Briefkasten im Mathematischen Institut.