

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie: Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ eine isolierte, nicht hebbare Singularität von $f(z)$, so ist z_0 eine wesentliche Singularität von $\exp f(z)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $\text{Res}_{z_0} f$ ist die eindeutig bestimmte Zahl $a \in \mathbb{C}$, so dass in einer punktierten Umgebung von z_0 die Funktion

$$g(z) = f(z) - \frac{a}{z - z_0}$$

eine Stammfunktion hat.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Rechenregeln für Residuen:

1. $\text{Res}_{z_0}(af + bg) = a\text{Res}_{z_0}f + b\text{Res}_{z_0}g$ für holomorphe Funktionen f, g mit isolierter Singularität in z_0 und $a, b \in \mathbb{C}$.
2. $\text{Res}_{z_0}f = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$ falls z_0 eine einfache Polstelle von f ist.
3. Hat g in z_0 eine einfache Nullstelle, so gilt $\text{Res}_{z_0} \frac{1}{g} = \frac{1}{g'(z_0)}$.
4. Hat f in z_0 eine n -fache Polstelle, also $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$ is holomorph in einer Umgebung von z_0 und $g(z_0) \neq 0$, dann gilt $\text{Res}_{z_0} f = g^{(n-1)}(z_0)/(n-1)!$.

Abgabe bis Mittwoch, 21. Dezember, 16 Uhr, in dem dafür vorgesehenen Briefkasten im Mathematischen Institut.