Übung zur Funktionentheorie — Wintersemester 2022/23, Blatt 10

Dr. Christian Ketterer, Marius Amann — 30. August 2023

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie für $a > 1$ die Formel

$$\int_0^{2\pi} \frac{ds}{a + \cos s} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine rationale Funktion mit Polynomen p und q vom Grad m bzw. n. Es gilt $n \geq m + 2$ und $N_q = \{a \in C : q(a) = 0\} \subset \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{a \in N_q, \mathrm{Im} a > 0} \mathrm{Res}_a R.$$

Aufgabe 3 (*Fundamentalsatz der Algebra*) (4 Punkte)

Sei $p(z) = z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Angenommen $p(z)$ hat keine Nullstelle. Zeigen Sie einen Widerspruch:

(a) Für $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, gilt $n(p \circ \gamma_r, 0) = n$ falls $r \geq 1$ hinreichend groß.

(b) $n(p \circ \gamma_r, 0) = 0$ falls $r = 0$.

(c) $n(p \circ \gamma_r, 0)$ hängt nicht von $r \geq 0$ ab.

Abgabe bis Mittwoch, 11. Januar, 16 Uhr, in dem dafür vorgesehenen Briefkasten im Mathematischen Institut.

*** *Wir wünschen allen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch in das Neue Jahr!!* ***