Übung zur Funktionentheorie — Wintersemester 2022/23, Blatt 11
Dr. Christian Ketterer, Marius Amann — 30. August 2023

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Sei $p \in \mathbb{C}$ ein einfacher Pol von f und $\gamma_r(t) = p + re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Beweisen Sie die Aussage

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z) = \pi i \mathrm{Res}_p f(z),$$

die wir im Beweis von (6.24) Lemma verwendet haben.

(b) Zeigen Sie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Hinweise: Verwenden Sie das (6.24) Lemma.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei p eine Polstelle der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ mit $k \le m \in \mathbb{N}$ von f, und sei g die holomorphe Fortsetzung von $(z-p)^m f(z)$ nach p. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Res}_p f(z) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(p).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x - ib} dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x + ib} dx$$

wobei $a > 0$ und $b \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im} b > 0$.

(b) Zeigen Sie die Formeln von Laplace:

$$\int_0^{\infty} \frac{b\cos(ax)}{x^2 + b^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2} dx = \frac{1}{2}\pi e^{-ab}$$

für $a, b > 0$.

Abgabe bis Mittwoch, 18. Januar, 16 Uhr, in dem dafür vorgesehenen Briefkasten im Mathematischen Institut.