
Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $G \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Zeigen Sie, dass eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ mit $e^{f(z)} = z$ existiert, und dass dann $\{f+2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$ die Menge aller holomorphen Funktionen auf G mit dieser Eigenschaft ist, die SZweige des Logarithmusäuf G.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ reell-linear unabhängig und f eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe, nichtkonstante, doppel periodische Funktion mit den Perioden w_1 und w_2, d.h. $f(z+w_1) = f(z + w_2) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f auf dem Fundamentalbereich $F = \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 : \lambda_1, \lambda_1 \in [0, 1)$ ebenso viele Polstellen wie Nullstellen hat, jeweils gezählt mit Vielfachheit.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$ sei $T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. T_A heißt Möbiustransformation.

(a) Ist $A \in SL(2, \mathbb{R})$, so gilt $T_A \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.

(b) $T : SL(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ mit $A \mapsto T_A$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

(c) $T_A = \mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ genau dann, wenn $A = \pm E_2 = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Abgabe bis Mittwoch, 1. Februar, 16 Uhr, in dem dafür vorgesehenen Briefkasten im Mathematischen Institut.