
Aufgabe 1 *(p-harmonische Funktionen)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Die p-Energie von $u \in C^1(\Omega)$ is definiert durch

$$E(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |Du|^p dx$$

mit $1 < p < \infty$. Berechnen Sie die erste Variation des Funktionals $E(u)$ und stellen Sie die zugehörige Euler-Lagrange Gleichung auf.

Aufgabe 2 *(Kapillarflächen)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-Rand Betrachte für $u \in C^2(\Omega)$ und $\kappa, \sigma \in \mathbb{R}$ das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2} dx + \frac{\kappa}{2} \int_\Omega u(x) dx + \sigma \int_{\partial\Omega} u d \operatorname{vol}_{\partial\Omega} .$$

Es gelte $\delta\mathcal{F}(u, \phi) = 0$ für alle $\phi \in C^2(\Omega)$.

Berechnen Sie die resultierenden Gleichungen in Ω sowie auf $\partial\Omega$, und interpretieren Sie die Randbedingung geometrisch.

Abgabe möglich am Dienstag, 03. November, vor oder nach der Vorlesung.