Aufgabe 1 *(Energie Erhaltung)*
Sei $u \in C^1([a,b]) \cap C^2((a,b)) =: \mathcal{C}$ und $\mathcal{F}(u) := \int_a^b f(u(x), u'(x))dx$, d.h. die Lagrange-Funktion f hängt nicht von x ab.

(i) Leiten Sie die Euler-Lagrange Gleichung von $\mathcal{F}$ her.

(ii) Sei $u \in \mathcal{C}$ ein Lösung der Euler-Lagrange Gleichung. Zeigen Sie, dass $f(u,u') - u'\partial_p f(u,u') = const$ auf $[a,b]$.

Aufgabe 2 *(Rotationsflächen)*
Sei $u : [a,b] \to \mathbb{R}_{>0}$ ein C^2-Funktion. Dann ist

$$v : (x^1, x^2) \in [a,b] \times [0,\pi] =: \Omega \mapsto (x^1, u(x^1)\cos x^2, u(x^1)\sin x^2)$$

eine parametrisiert Fläche. Der Flächeninhalt is $\int_\Omega \sqrt{\det g(x)}dx$ wobei $g(x) = (\langle \partial_{x^\alpha} v(x), \partial_{x^\beta} v(x)\rangle)_{\alpha,\beta=1,2}$.

(i) Zeigen sie: Der Flächeninhalt von v ist gegeben durch $\mathcal{F}(u) = \pi \displaystyle\int_a^b u(t)\sqrt{1+(u'(t))^2}dt$.

(ii) Finden Sie mit Hilfe von Aufgabe 1 die Lösungen der Euler-Lagrange Gleichung von $\mathcal{F}$.

Aufgabe 3*(Zweites Newton'sches Gesetz)*
Betrachten Sie l Punkte $p_1, \dots, p_l$ in $\mathbb{R}^3$, in denen Massen $m_1, \dots, m_l > 0$ konzentriert sind, und die unter dem Einfluß der Kräfte F_j, $j = 1, \dots, l$ stehen. Wir nehmen an, dass die Kräfte F_j zeitunabhängig sind und nur von der Position $x^j(t) \in \mathbb{R}^3$ der Massenpunkte zur Zeit t abhängen, d.h. $F_j = F_j(x = (x^1, \dots, x^l))$. Außerdem existiert eine Funktion $V : \mathbb{R}^{3l} \to \mathbb{R}$, so dass $-\nabla V = (F_1, \dots, F_l)$.

Wir nehmen an $x \in C^2([t_1,t_2])$. Betrachten Sie das Funktional $\mathcal{F}(x) = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), x'(t))dt$ mit $L(z,p) = T(p) - V(z)$ mit $z, p \in \mathbb{R}^{3l}$ wobei

$$T(p) := \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{2} m_j |p_j|^2.$$

(i) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange Gleichung.

(ii) Zeigen Sie, die Energie $E(x,x') = T(x') + V(x)$ für eine Lösung x der Euler-Lagrange Gleichung ist konstant.

Abgabe möglich am Dienstag, 10. November, vor oder nach der Vorlesung.