Aufgabe 1 *(Drehimpulserhaltung)*
Betrachten Sie Punkte $p_1, \dots, p_l$ in $\mathbb{R}^3$, in denen Massen $m_1, \dots, m_l > 0$ konzentriert sind. Wir nehmen an, dass sich Massen gemäß dem Newton'schen Gravitationgesetz anziehen. $X_l(t) = (x_l(t), y_l(t), z_l(z))$ beschreibt die Bewegung der l-ten Punktmasse in Abhängigkeit von der Zeit t. $(X_1(t), \dots, X_l(t))$ beschreibt die Bewegung aller Teilchen und ist gegeben als Minimierer des Funktionals $\mathcal{F}(X) = \int_{t_1}^{t_2} f(X(t), X'(t))dt$ wobei

$$f(z,p) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l} m_j |p_j|^2 - \sum_{l<k} \frac{\kappa m_l m_k}{|X_l - X_k|}.$$

(i) Zeigen Sie: $\mathcal{F}$ ist infinitesimal invariant unter Rotationen von $\mathbb{R}^3$.

(ii) Leiten Sie das zugehörige Noether'sche Erhaltungsgesetz her und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2 *(Verallgemeinertes Dirichlet Integral)*
Sei $G(z) = (g_{ik}(z))_{i,k=1,\dots,m}$ eine $m \times m$-Matrix Abbildung auf $\mathbb{R}^m$, so dass $G(z)$ eine symmetrische und positiv definite Matrix ist für alle $z \in \mathbb{R}^m$ und $g_{ik} \in C^2(\mathbb{R}^m)$ für alle $i,k = 1, \dots, m$. Das verallgemeinerte Dirichlet Intergral bezüglich G von $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ is definiert durch

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega g_{ik}(z)\partial_\alpha u^i(z)\partial_\alpha u^k(z)dz$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1-Gebiet ist.

(i) Leiten Sie die Euler-Lagrange Gleichungen her.

(ii) Sei $M = H^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}^m$ eine Untermannigfaltigkeit, wobei $H \in C^1(\mathbb{R}^m)$ und DH_z hat maximalen Rang in allen Urbildern z von 0. Leiten Sie die transversalen Randbedingungen für ein Extremum $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ her.

Aufgabe 3*(Minimumproblem ohne Lösung)*
Zeigen Sie, dass das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 \left[(1-(u'(x))^2)^2 + u^2(x)\right] dx$$

sein Infimum auf $C^1([0,1])$ nicht annimmt.

Abgabe möglich am Dienstag, 17. November, vor oder nach der Vorlesung.