---

**Aufgabe 1** *($L^\infty(\mu)$ ist nicht separabel)*
Zeigen Sie, dass $L^1(\mathbb{R})$ ein echte Teilmenge des Dualraums $L^\infty(\mathbb{R})'$ ist.
*Hinweis: Betrachten sie ein Dirac-Maß auf dem Unteraum $C_0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.*

**Aufgabe 2** *($BV$-Funktionen)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachten Sie für $f \in L^1(\Omega)$ das Funktional

$$\Phi_f : C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \quad \Phi_f(g) = -\int_\Omega f \operatorname{div}(g) d\mathcal{L}^n.$$

Die Funktion $f$ heißt von beschränkter Variation auf $\Omega$, kurz $f \in BV(\Omega)$, falls

$$\sup \{\Phi_f(g) : |g| \leq 1 \text{ auf } \Omega\} < \infty.$$

Zeigen Sie: es gibt ein Radonmaß $\mu_f$ auf $\Omega$ und eine $\mu_f$-messbare Abbildung $\nu_f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $|\nu_f| = 1$ für $\mu_f$-fast alle $x \in \Omega$, so dass

$$\Phi_f(g) = \int_\Omega \langle g, \nu_f \rangle \quad \forall g \in C_c^0(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Bestätigen Sie $d\mu_f = |\nabla f| d\mathcal{L}^n$ und $\nu_f = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ falls $f \in C^1(\Omega)$.

**Aufgabe 3** *(Zur schwachen Konvergenz)*
Seien $X, Y$ Banachräume und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$, $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X'$. Zeigen Sie:

(i) $x_k \to x \Longrightarrow x_k \rightharpoonup x, \quad \phi_k \to \phi \Longrightarrow \phi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \phi.$

(ii) $x_k \to x$ und $\phi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \implies \phi_k(x_k) \to \phi(x)$,

(iii) $x_k \rightharpoonup x$ und $\phi_k \to \phi \implies \phi_k(x_k) \to \phi(x)$,

(iv) $x_k \rightharpoonup x \implies Tx_k \rightharpoonup Tx \ \ \forall T \in L(X, Y)$.

*Abgabe möglich am Dienstag, 24. November, vor oder nach der Vorlesung.*