
Aufgabe 1 *($W^{1,p}(\Omega)$ als Banachraum)*
Sei $p \in [1, \infty]$. Zeigen Sie, dass $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ ist ein Banachraum.

Aufgabe 2 *(Beispiele zur Existenz schwacher Ableitungen)*
Beweisen Sie die folgenden Aussagen

(i) Die Funktion $1_{(0,\infty)}$ liegt nicht in $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R})$.

(ii) Die Funktion $|x|$ liegt in $W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R})$, aber nicht in $W^{2,1}_{loc}(\mathbb{R})$.

(iii) Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ und μ ein Radonmaß auf $\mathbb{R}$. Geben Sie eine Definition für die Aussage $f' = \mu$ und zeigen Sie $1_{(0,\infty)}{}' = \delta_0$, wobei δ_0 das Diracmaß bei 0.

Aufgabe 3 *(Zur Kettenregel)*
Sei $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $u_+ = \max(u, 0) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ und

$$Du_+ = 1_{\{u>0\}} Du \quad \text{sowie} \quad D|u| = 1_{\{u>0\}} Du - 1_{\{u<0\}} Du.$$

Zeigen Sie auch, dass $Du = 0$ fast überall auf $\{u = 0\}$.
Hinweis: Betrachten Sie $u_\epsilon = \sqrt{u^2 + \epsilon^2} - \epsilon$.

Abgabe möglich am Dienstag, 31. November, vor oder nach der Vorlesung.