---

**Aufgabe 1** *(Reflexive Sobolevräume)*
Sei $p \in (1, \infty)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: $W^{1,p}(\Omega)$ und $W_0^{1,p}(\Omega)$ sind reflexiv.

**Aufgabe 2** *(Konvergenzsatz von Lebesgue)*
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, und $f_k, f : X \to \mathbb{R}$ seien $\mu$-meßbar. Es gelte

(i) $f_k \to f$ punktweise $\mu$-fast überall.

(ii) Für alle $k$ ist $|f_k| \leq g_k^p$ $\mu$-fast überall für $p$-integrierbare Funktionen $g_k : X \to [0, \infty)$ mit $g_k \to g$ in $L^p(\mu)$.

Zeigen Sie: $f_k \to f$ in $L^1(\mu)$.

**Aufgabe 3***(konvexe Funktionale)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $C^1$-Rand, $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ konvex und $g \in C^0(\overline{\Omega})$. Betrachten Sie auf $\mathcal{C} = \left\{ u \in C^1(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \right\}$ das Funktionale

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega (\phi(\nabla u(x)) + g(x)u(x))dx.$$

Zeigen Sie: $u \in \mathcal{C}$ ist ein Minimierer von $\mathcal{F}$ genau dann, wenn

$$-\operatorname{div}\left[(D_p\phi)(\nabla u)\right] = g.$$

*Hinweis: $\phi$ konvex impliziert $\phi(y) \geq \phi(x) + \phi'(x)(y - x)$.*

*Abgabe möglich am Dienstag, 15. Dezember, vor oder nach der Vorlesung.*