
Aufgabe 1 *(Nichtkonvexe Funktionale)*
Betrachten Sie auf $W^{1,\infty}(I)$, $I = (0,1)$, die Funktionale

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 ((u')^2 - 1)^2 dx \quad \& \quad \mathcal{G}(u) = \int_0^1 \left(\left((u')^2 - 1\right)^2 + u^2 \right) dx$$

unter der Randbedingung $u(0) = u(1) = 0$. Zeigen Sie:

(i) Beide Funktionale haben das Infimum Null. $\mathcal{F}$ hat unendliche viele Minimierer, $\mathcal{G}$ nimmt sein Infimum nicht an.

(ii) Keines der beiden Funktionale ist unterhalbstetig bzgl. gleichmäßiger Konvergenz auf I, oder bzgl. schwach-($*$)-Konvergenz in $L^\infty(I)$.

Aufgabe 2 *(Legendre-Hadamard Bedingung)*
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $F_\alpha : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F_\alpha(x, z, p) = \alpha |p|^2 + \det(p).$$

mit $p = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, wobei $|p|^2 = \sum_{i,j=1}^2 p_{i,j}^2$ ist.

(i) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die F_α die Legendre-Hadamard Bedingung erfüllt.

(ii) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ is F_α konvex.

(iii) Finden Sie eine Funktion $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, die poly-konvex aber nicht konvex ist.

Abgabe möglich am Dienstag, 22. Dezember, vor oder nach der Vorlesung.