
Aufgabe 1 *(Cacciopoli-Typ Ungleichung)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, und $u \in W^{1,2}(\Omega)$ sei eine schwache Lösung von $\Delta u = 0$, das heißt

$$\int_\Omega \partial_\alpha u \partial_\alpha \phi = 0 \quad \text{für alle } \phi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Zeigen Sie: Für $x_0 \in \Omega$, $0 < \rho < R \leq \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ gilt

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 dx \leq \frac{c}{(R-\rho)^2} \int_{B_R(x_0)\setminus B_\rho(x_0)} |u-\lambda|^2 \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}$$

und eine Konstante $c > 0$.
[Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Testfunktionen.]

Aufgabe 2 *(Poincaré-Sobolev-Typ Ungleichung)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und mit C^1-Rand, und es sei $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ gegeben, so dass $|\Omega_0| = \{x \in \Omega : u(x) = 0\} = \gamma|\Omega|$ für ein $\gamma \in (0,1]$. Zeigen Sie:

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega,\mathbb{R}^m)} \leq c(n,m,p,\gamma)\,\|Du\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{m\times n})} \text{ wobei } p^* = \frac{np}{n-p}$$

[Hinweis: Verwenden Sie die Poincaré und die Sobolev Ungleichung, und schätzen Sie $(u)_\Omega - (u)_{\Omega_0}$ geeignet ab.]

Aufgabe 3* *(Hölder-Stetigkeit)*
Sei $B := B_1 \subset \mathbb{R}^2$ und $u : B \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $u(x) = x^1|x|^{\alpha-1}$ für ein $\alpha \in (0,1)$. Zeigen Sie:

(i) $u \in W^{1,2}(B) \cap C^{0,\alpha}(\overline{B})$,

(ii) $u \notin C^{0,\beta}(\overline{B})$ für $\beta \in (\alpha, 1]$,

(iii) u ist eine schwache Lösung von $\operatorname{Div}(a(x)Du) = 0$ in B, d. h. $\int_B a_{i,j}\partial_i u \partial_j \phi = 0$ $\forall \phi \in W_0^{1,2}(B)$, mit meßbaren, beschränkten, und elliptischen Koeffizienten $a : B \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch

$$a_{i,j}(x) := \delta_{i,j} + \frac{(1-\alpha)(1+\alpha)}{\alpha^2}\frac{x^i x^j}{|x|^2} \quad i,j \in \{1,2\}$$

Abgabe möglich am Dienstag, 12. Januar, vor oder nach der Vorlesung.