
Aufgabe 1 *(Differenzenquotient)*
Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, $s \in \{1, \ldots, n\}$ und $h > 0$, und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren den Differenzenquotient duch

$$\Delta_{h,s}u(x) := \frac{u(x + he_s) - u(x)}{h}, \quad \forall x \in \Omega_{s,h} := \{x \in \Omega : x + he_s \in \Omega\}$$

wobei $(e_s)_{s=1,\ldots,n}$ die Standardbasis im $\mathbb{R}^m$. Sei $p \in (1, \infty)$ und $\Omega_0 \Subset \Omega$. Zeigen Sie:

(i) Is $u \in W^{1,p}(\Omega)$, dann $\Delta_{h,s}u \in W^{1,p}(\Omega_{s,h})$ und $D\Delta_{h,s}u = \Delta_{h,s}Du$. Außerdem gilt

$$\Delta_{h,s}(u \cdot v)(x) = u(x + he_s)\Delta_{h,s}v(x) + \Delta_{h,s}u(x)v(x + he_s).$$

Insbesondere, falls u, v mit kompaktem Träger in Ω und h hinreichend klein: $\int u\Delta_{h,s}v = -\int v\Delta_{-h,s}$.

(ii) Es gibt eine Konstante $c(n)$, so dass für jedes $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\Omega_0 \Subset \Omega$ offen und $s = 1, \ldots, n$

$$\|\Delta_{h,s}u\|_{L^p(\Omega_0)} \le c\,\|Du\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{wobei } h < \frac{\operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)}{2}.$$

(iii) Falls $u \in L^p(\Omega)$, und falls es eine Konstante $L \ge 0$ gibt, so dass für jedes $h < \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$, $s = 1, \ldots, n$

$$\|\Delta_{h,s}u\|_{L^p(\Omega_0)} \le L,$$

dann ist $u \in W^{1,p}(\Omega_0)$, $\|Du\|_{L^p(\Omega_0)} \le L$ und $\Delta_{h,s}u \to D_s u$ schwach in $L^p(\Omega_0)$ falls $h \to 0$.

Aufgabe 1 *(Morrey's theorem)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt, und $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ eine Lösung von

$$-D_\alpha(A^{\alpha,\beta}_{i,j} D_\beta u^j) = 0 \quad \text{in } \Omega,\ i = 1, \ldots, m.$$

mit Koeffizienten $A^{\alpha,\beta}_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ für $i, j = 1, \ldots, m, \alpha, \beta = 1, 2$, so dass

$$\lambda|\xi|^2 \le A^{\alpha,\beta}_{i,j}\xi^\alpha_i\xi^\beta_j \le \Lambda|\xi|^2 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^{m\times 2}.$$

Zeigen Sie: $u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$ für ein $\alpha \in (0, 1)$.

Abgabe möglich am Dienstag, 19. Januar, vor oder nach der Vorlesung.