
Aufgabe 1 *(Abschätzung höherer Ordnung für harmonische Funktionen)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und $u \in C^\infty(\Omega)$ sei harmonisch, d.h. $\Delta u = 0$ auf Ω. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $B_R(x_0) \subset \Omega$. Zeigen Sie

$$\int_{B_{R/2}(x_0)} |D^k u|^2 \leq c(k,R) \int_{B_R(x_0)} |u|^2.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass alle Ableitungen von u selbst wieder harmonische Funktionen sind, und wenden Sie wiederholt Aufgabe 1, Blatt 10 an.

Aufgabe 2 *(Regularität harmonischer Funktionen)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und $u \in W^{1,2}$ eine schwache Lösung von $\Delta u = 0$. Zeigen Sie, dass $u \in W^{k,2}_{loc}(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und folgern Sie, dass $u \in C^\infty(\Omega)$.

Anleitung: Zeigen Sie, dass die Glättung $S_\epsilon u$ harmonisch ist, und verwenden Sie Aufgabe 1 zusammen mit Rellich's Kompaktheitssatz und dem Morrey Einbettungssatz für Sobolev-Räume höherer Ordnung um zu zeigen, dass $S_\epsilon u \to u$ in C^k nach Wahl einer Teilfolge.

Wir zitieren an dieser Stelle den Morrey Einbettungssatz für Sobolev-Räume höherer Ordnung:

Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand. Es seien $k, m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$, und $p \in (n/m, n/m-1)$. Dann ist die Einbettung $W^{k,p}(\Omega,\mathbb{R}^m) \to C^{k-m,m-n/p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ stetig mit*

$$\|u\|_{C^{k-m,m-n/p}(\Omega,\mathbb{R}^m)} \leq c(n,m,p,k,\Omega) \|u\|_{W^{k,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)}.$$