Abteilung für mathematische Logik
Mathematische Logik (SS 2014)
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Mohsen Khani

Übung zur Vorlesung
Aufgabe 10, die natürlichen Zahlen
Abgabe am 14.7 vor 16:00 Uhr

Aufgabe (10-1)**.** Zeigen Sie in ZFC, daß $(\omega, +, \cdot)$ ein unitärer kommutativer Halbring ist. Das heißt, daß die folgende Körperaxiome gelten:

1. $\forall x, y \, x + y \doteq y + x$
2. $\forall x \, x + 0 \doteq x$
3. $\forall x, y, z \, (x + y) + z \doteq x + (y + z)$
4. $\forall x, y \, x \cdot y \doteq y \cdot x$
5. $\forall x \, x \cdot 1 \doteq x$
6. $\forall x, y, z \, (x \cdot y) \cdot z \doteq x \cdot (y \cdot z)$
7. $\forall x, y, z \, x \cdot (y + z) \doteq (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

(4)

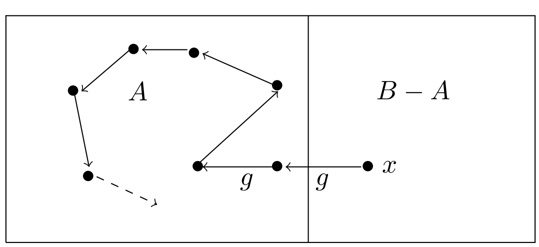
Aufgabe (10-2)**.** Sei $\mathfrak{M}$ ein Modell von ZFC. Ein Element a von $\mathfrak{M}$ heißt *nichtstandard natürliche Zahl*, wenn $\mathfrak{M} \models a \in \omega$, aber $\mathfrak{M} \models \neg a \doteq \underline{n}$ für alle $n = 0, 1, \ldots$. Zeigen Sie:

1. Wenn ZFC konsistent ist, gibt es ein Modell mit nichtstandard natürlichen Zahlen.
2. Es gibt in $\mathfrak{M}$ keine kleinste nichtstandard natürliche Zahl.

(4)

Aufgabe (10-3)**.** Beweisen Sie den Satz von Schröder-Bernstein: Seien $f : A \to B$ und $g \colon B \to A$ Injektionen. Dann gibt es eine Bijektion $h \colon B \to A$. (4)

Hinweis. Wir können annehmen, daß A eine Teilmenge von B und f die Inklusionsabbildung ist. Sei $C = \{g^n(x) \mid n \in \omega, x \in B \setminus A\}$. Setze $h(c) = g(c)$ für $c \in C$ und $h(y) = y$ für $y \in B \setminus C$.



Beachten Sie, dass der hier vorgeschlagene Beweis kommt ohne das Auswahlaxiom aus.

Aufgabe (10-4)**.** Eine Menge a heißt *endlich*, falls es eine Bijektion zwischen a und einer natürlichen Zahl gibt. Geben Sie einen formalen Beweis dafür, daß eine Menge a genau dann endlich ist, wenn es eine lineare Ordnung auf ihr gibt, für die jede nicht-leere Teilmenge ein kleinstes und ein größtes Element besitzt. (4)

Hinweis. schwierig ist in der Rückrichtung zu zeigen, daß die Bijektion aus dem naiven Beweis tatsächlich eine Menge ist. Dazu konstruiere man mit Hilfe des Rekursionssatzes 8.6 zunächst eine Funktion $F : \omega \to a \cup \{*\}$, deren Einschränkung auf ein geeignetes $\underline{n}$ die gewünschte Bijektion ergibt. Hierbei sei $*$ eine Menge, die nicht in a liegt.