Abteilung für mathematische Logik
Mathematische Logik (SS 2014)
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Mohsen Khani

Übung zur Vorlesung
Aufgabe 11, Ordinalzahlen und Kardinalzahlen
Abgabe am 21.7 vor 16:00 Uhr

Aufgabe (11-1)**.** Zeigen Sie, daß das Auswahlaxiom aus dem Zornschen Lemma folgt. (4)

Hinweis. Sei x eine Menge von nicht–leeren Mengen. Betrachte eine maximale partielle Auswahlfunktion.

Aufgabe (11-2)**.** Für eine Menge A von Ordinalzahlen sei $\sup_{\alpha\in A}\alpha$ das Supremum von A, also die kleinste obere Schranke von A in On. Wir definieren auf Addition, Multiplikation und Exponentiation von Ordinalzahlen durch folgende Rekursionsvorschriften: (λ ist immer eine Limeszahl)

$$
\begin{array}{ccc}
\alpha + 0 = \alpha & \alpha + (\beta+1) = (\alpha+\beta)+1 & \alpha + \lambda = \sup\limits_{\beta<\lambda} \alpha+\beta \\
\alpha \cdot 0 = \alpha & \alpha \cdot (\beta+1) = (\alpha\cdot\beta)+\alpha & \alpha \cdot \lambda = \sup\limits_{\beta<\lambda} \alpha\cdot\beta \\
\alpha^0 = 1 & \alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha & \alpha^\lambda = \sup\limits_{\beta<\lambda} \alpha^\beta
\end{array}
$$

Zeigen Sie den Satz über die *Cantorsche Normalform*: Jede Ordinalzahl läßt sich auf eindeutige Weise schreiben als

$$\omega^{\alpha_1}\cdot n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k}\cdot n_k$$

für natürliche Zahlen $n_i > 0$ und Ordinalzahlen $\alpha_1 > \ldots > \alpha_k$.

(4)

Aufgabe (11-3)**.** Zeigen Sie, daß es eine kleinste Ordinalzahl ε_0 gibt mit $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$. Zeigen Sie, daß sich jede Ordinalzahl unterhalb von ε_0 durch einen Ausdruck beschreiben läßt, der sich aus der Konstanten 0 und den Funktionen $x+y$, $x\cdot y$ und ω^x aufbaut. (4)

Hinweis.

$$\epsilon \to \omega^\epsilon \to \omega^{(\omega^\epsilon)} \to \omega^{(\omega^{(\omega^\epsilon)})} \to \omega^{(\omega^{(\omega^{(\omega^\epsilon)})})} \to \ldots.$$

Aufgabe (11-4)**.** Eine Menge heißst *erblich endlich*, falls sie Teilmenge einer endlichen transitiven Menge ist. Wir definieren: $\mathrm{V}_0 := \varnothing$, $\mathrm{V}_{n+1} := \mathfrak{P}(\mathrm{V}_n)$ und $\mathrm{V}_\omega := \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathrm{V}_n$. Zeigen Sie:

1. Jedes V_n ist endlich, transitiv und $\mathrm{V}_n \in \mathrm{V}_{n+1}$.

2. $a \in \mathrm{V}_\omega \iff a$ ist erblich endlich.

(4)

Hinweis. Zeigen Sie für die Rückrichtung, dass jedes Element einer erblich endlichen Menge wieder erblich endlich ist. Versuchen Sie dann eine Induktion über die Anzahl der Elemente einer endlichen transitiven Menge.

Aufgabe (11-5, komplementär)**.** Sei $n \geqslant 2$ eine natürliche Zahl. Definiere die Funktion $S_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $S_n(0) = 0$ und $S_n(x) = \sum_{i<k} (n+1)^{S_n(i)} a_i$, wobei $x = \sum_{i<k} n^i a_i$, $a_i < n$, die n–adische Darstellung von x ist. Eine Goodsteinfolge ist eine Folge $x_0, x_1, \ldots$ von natürlichen Zahlen, die die Rekursionsvorschrift $x_{n+1} = S_{n+2}(x_n) \dot{-} 1$ erfüllen. Beweisen Sie den *Satz von Goodstein*:

> Für jede Goodsteinfolge existiert ein n mit $0 = x_n = x_{n+1} = \ldots$.

(4 Bonuspunkt)

Hinweis. Definieren Sie $S'_n \colon \mathbb{N} \to \varepsilon_0$ durch $S'_n(0) = 0$ und $S'_n(\sum_{i<k} n^i a_i) = \sum_{i<k} \omega^{S'_n(i)} a_i$. Setze $F(n) = S'_{n+2}(x_n)$. Wenn $x_n \neq 0$, ist $F(n+1) < F(n)$.