Abteilung für mathematische Logik
Mathematische Logik (SS 2014)
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Mohsen Khani

Übung zur Vorlesung
Aufgabe 12, Metamathematik von ZFC und Rekursionstheorie
Abgabe am 28.7 vor 16:00 Uhr

Aufgabe (12-1)**.** Zeigen sie, daß, wenn $\neg\,\mathrm{CON}_{\mathrm{ZFC}}$ nicht in ZFC beweisbar ist, diese Unbeweisbarkeit nicht in ZFC beweisbar ist. (4)

Hinweis. Verwenden Sie die Tatsache, dass der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz gilt für jede Erweiterung von ZFC durch endlich viele Axiome, insbesondere für $\mathrm{ZFC}^{+} = \mathrm{ZFC} + \mathrm{CON}_{\mathrm{ZFC}}$.

Aufgabe (12-2)**.**

a) Zeichnen Sie das Flußdiagramm einer Maschine, die (in der $|$–Darstellung) das Produkt zweier Zahlen berechnet. (2)

b) Geben Sie eine Maschine über dem Alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1, |\}$ an, die die Binärdarstellung einer Zahl in ihre $|$–Darstellung umwandelt, und eine Maschine, die das umgekehrte tut. (2)

Aufgabe (12-3)**.** Sei ϕ eine beliebige L_{Me}–Aussage. Zeigen Sie:

1. $\mathrm{ZFC} \vdash \phi \leftrightarrow \mathrm{Bew}(\ulcorner\phi\urcorner)$ gdw. $\mathrm{ZFC} \vdash \phi$,
2. $\mathrm{ZFC} \vdash \phi \leftrightarrow \neg\,\mathrm{Bew}(\ulcorner\neg\phi\urcorner)$ gdw. $\mathrm{ZFC} \vdash \neg\phi$.
3. $\mathrm{ZFC} \vdash \phi \leftrightarrow \mathrm{Bew}(\ulcorner\neg\phi\urcorner)$ gdw. $\mathrm{ZFC} \vdash \phi \leftrightarrow \neg\,\mathrm{CON}_{\mathrm{ZFC}}$.

(4)

Aufgabe (12-4)**.** Die *Ackermannfunktion* $A\colon\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist definiert durch $A(x, 0) = 1 + x$, $A(0, y + 1) = A(1, y)$ und $A(x + 1, y + 1) = A(A(x, y + 1), y)$.

a) Bestimmen Sie die Funktionen $A_n(X) \coloneqq A(x, n)$ für $n = 0, 1, 2, 3$. (2)

b) Zeigen Sie, daß jedes A_n primitiv rekursiv ist. Begründen Sie, warum A in einem intuitiven Sinn berechenbar ist. (man kann nachweisen, daß A tatsächlich rekursiv ist.) (2)

c) Für jede primitiv rekursive Funktion $f\colon\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(x_1, \cdots, x_k) \le A(\max(x_1, \ldots, x_k), n)$ für alle $(x_1, \ldots, x_k) \ne (0, \ldots, 0)$. (1 Bonuspunkt)

d) Die Ackermannfunktion ist nicht primitiv rekursiv. (1 Bonuspunkt)

Hinweis. zu c) über den Aufbau primitiv rekursiver Funktionen.
Zu d): man konstruiere aus A eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, für die c) nicht gilt.

Aufgabe (12-5 Turingmaschine, Komplementär)**.** Eine *Turingmaschine* verwendet als Speicher ein zweiseitig unendliches Band, auf dem sich ein Lese/Schreibkopf bewegt. Die "Zellen" des Bandes sind leer oder enthalten einen Buchstaben aus $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_L\}$. Das Programm einer Turingmaschine ist eine endliche Folge von Befehlen, von denen es vier Arten gibt: den Stopbefehl `STOP`; den Schreibbefehl `WRITE`(l), der a_l in die aktuelle Zelle unter dem Schreibkopf schreibt oder den Inhalt der Zelle löscht, wenn $l = 0$; die Befehle `LEFT` und `RIGHT`, die den Kopf veranlassen, sich eine Zelle nach links oder nach rechts zu bewegen; den Verzweigungsbefehl `GOTO(`c_0`,...,`c_L`)`, der zum Befehl mit der Nummer c_l springt, wenn die aktuelle Zelle den Buchstaben a_l enthält, oder zum Befehl c_0, wenn die Zelle leer ist. Am Anfang des Laufs steht die Eingabe $w_1, \ldots, w_n$ durch leere Zellen getrennt unmittelbar rechts von Lesekopf, sonst ist das Band leer. Am Ende steht die Ausgabe rechts von Lesekopf.
Zeigen Sie, daß sich jede rekursive Funktion von einer Turingmaschine berechnen läßt. (4 Bonuspunkte)