Abteilung für mathematische Logik
Mathematische Logik (SS 2014)
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Mohsen Khani

Übung zur Vorlesung
Aufgabe 2, Strukturen, Formeln und Semantik
Abgabe am 12.5 vor 16 Uhr

Aufgabe (2-1)**.** Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Unterstruktur und $s_0, \ldots, s_n \in A$. Zeigen Sie: die von $\{s_0, \ldots, s_n\}$ erzeugte Unterstruktur besteht gerade aus allen $t^{\mathfrak{A}}[s_0, \ldots, s_n]$ für L–Terme $t(x_0, \ldots, x_n)$ (siehe Aufgabe 1-3). (4)

Aufgabe (2-2)**.**

a) Man zeige, daß es zu jedem Term $t(x_1, \ldots, x_n)$ der Ring–Sprache L_R ein eindeutig bestimmtes Polynom $p(X_1, \ldots, X_1) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ gibt, sodaß

$$t^R[a_1, \ldots, a_n] = p(a_1, \ldots, a_n)$$

für alle kommutativen Ringe $R = (R, 0, 1, +, -, \cdot)$ und $a_1, \ldots, a_n \in R$. (3)

b) Betrachte die Struktur $\langle \mathbb{C}, +, ., 0, 1\rangle$ mit $\mathbb{C}$ die Menge alle Komplexen Zahlen. Was ist die erzeugte Unterstruktur von $\{i\}$? (siehe Aufgabe 2-1). (1)

c) Was sind die Formeln in der Ring–Sprache mit nur einer freien Variablen und ohne Quantoren? (Komplementär)

Definition (Komplementär)**.** Sei K ein geordneter Körper. Ein Element ϵ aus K heisst infinitesimal, wenn $-\frac{1}{n} < \epsilon < \frac{1}{n}$ für alle positiven natürlichen Zahlen n. K heisst archimedisch, wenn es in K keine infinitesimale gibt.

Aufgabe (2-3, Komplementär)**.** Sei $\mathfrak{R}$ der angeordnete Körper der reellen Zahlen und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) = 0$. Betrachte die $L_{AK} \cup \{\bar{f}\}$ Struktur $(\mathfrak{R}, f)$. Sei $(\mathfrak{R}^*, f^*)$ zu $(\mathfrak{R}, f)$ elementar äquivalent und nicht archimedisch (Die Existenz eines solchen $(\mathfrak{R}^*, f^*)$ folgt aus dem Kompaktheitssatz, daß lernen wir später in diesem Kurse). Zeigen Sie: f ist genau dann stetig bei 0, wenn f^* Infinitesimale in Infinitesimale abbildet.

Aufgabe (2-4)**.**

a) Zeigen sie, dass es eine Aussage ϕ in der Gruppen–Sprache gibt, sodass $\mathfrak{M} \models \phi$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}$ isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist. (1)

b) Sie $L = \{R(.,.)\}$ mit R eine zweistellige Relationszeichen. Schreiben Sie eine L-Aussage ϕ, sodass für jede endliche L-Struktur $\mathcal{M}$, mit $\mathcal{M} \models \phi$ folgt, dass M eine gerade Anzahl von Elemente hat. (1)

c) Ist $\langle \mathbb{C}, +, .\rangle$ elementar äquivalent/Isomorph zu $\langle \mathbb{R}, +, .\rangle$? (1)

d) Ist $\langle \mathbb{Z}, +\rangle$ elementar äquivalent/Isomorph zu $\langle \mathbb{Q}, +\rangle$? (1)

e) Ist $\langle \mathbb{R}, +, ., 0, 1\rangle$ elementar äquivalent/Isomorph zu $\langle \mathbb{Q}, +, ., 0, 1\rangle$? (1)

f) Ist $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ elementar äquivalent/Isomorph zu $\langle \mathbb{N}, <\rangle$ (1)

g) Ist $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ elementar äquivalent/Isomorph zu $\langle \mathbb{Q}, <\rangle$? (1)

Bemerkung. Alle Strukturen $\langle M, <\rangle$, in dem $<$ eine dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte ist, sind elementar äquivalent. Zum Beispiel $\langle \mathbb{R}, <\rangle$ ist elementar äquivalent zu $\langle \mathbb{Q}, <\rangle$. Durch einen Satz von Cantor, zwei solche Strukturen sind isomorph, wenn ihre Grundmengen dieselbe Kardinalität haben. Deshalb, gibt es Strukturen, welche elementar äquivalent und nicht isomorph sind.

Aufgabe (2-5)**.**

a) Beweisen Sie: Isomorphe Strukturen sind elementar äquivalent. (2)

b) Sei L endlich und $n \in \mathbb{N}$ fixiert. Zeigen Sie daß L-Strukturen mit Grundmengen der Größe n, sind isomorph gdw. sie elementar äquivalent sind. (4)