Abteilung für mathematische Logik
Mathematische Logik (SS 2014)
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Mohsen Khani

Übung zur Vorlesung
Aufgabe 3, Allgemeingültige Formeln
Abgabe am 19.5 vor 16:00 Uhr

Aufgabe (3-1)**.** In jeder Menschenmenge gibt es einen, wenn der einen Hut trägt, dann auch alle anderen. Ist das wahr in der Alltagssprache? Wie wäre es, wenn wir der Logik erste Ordnung benutzen: ist die folgende Formel allgemeingültig (in einer Sprache, mit mindestens einem einstelligen Relationszeichen)?

$$\exists x\big(H(x) \to \forall y H(y)\big)$$

Diskutieren Sie, worin der Unterschied ist. (4)

Aufgabe (3-2)**.** Zeigen Sie, dass endliche elementar äquivalente Strukturen mit der gleichen Größe isomorph sind.

Hinweis. Sehen Sie Aufgabe 2-5 für endliche Sprache. Für unendliches L, weitergehen Sie mit der folgende Beweis: Nehmen Sie an, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ elementare Äquivalent und nicht isomorph sind. Sei $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_m\}$. Sei $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ die Menge der Bijektionen zwischen A und B. Für jedes $f_i \in F$ gibt es ein Symbol $Z_{f_i} \in L$ sodass Z_{f_i} nicht mit dem isomorphismus f_i kommutiert. Sei $L' = \{Z_{f_1}, \dots, Z_{f_n}\}$. Leiten Sie einen Widerspruch daraus ab! (4)

Aufgabe (3-3)**.** Sei ϕ, ψ und χ, L-Formeln. Welche der folgenden Behauptungen sind richtig? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

a) $(\phi \wedge \psi) \models \chi$ genau dann, wenn $\phi \models \chi$ und $\psi \models \chi$ (1)

b) $(\phi \vee \psi) \models \chi$ genau dann, wenn $\phi \models \chi$ oder $\psi \models \chi$ (Komplementär)

c) $\forall x \exists y \phi \models \exists y \forall x \phi$ (1)

d) $\exists x(\phi \wedge \psi) \models \exists x \phi \wedge \exists x \psi$. (1)

e) $\exists x(\phi \vee \psi) \models \exists x \phi \vee \exists x \psi$. (1)

f) $\forall x(\phi \wedge \psi) \models \forall x \phi \wedge \forall x \psi$. (Komplementär)

g) $\forall x(\phi \vee \psi) \models \forall x \phi \vee \forall x \psi$. (Komplementär)

h) Sei $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, +, ., < \rangle$. Finden Sie eine Formel $\phi(x, y)$ ohne $<$ sodass

$$\mathfrak{R} \models x < y \leftrightarrow \phi(x, y).$$

Machen Sie das gleiche für $\mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, ., < \rangle$. (1)

Aufgabe (3-4)**.**

a) Wir nennen zwei aussagenlogische Formeln *äquivalent*, wenn sie bei allen Belegungen der Variablen den gleichen Wahrheitswert haben. Zeigen Sie, daß jede aussagenlogische Formel äquivalent ist zu einer Formel in *disjunktiver Normalform*

$$\bigvee_{i=1}^{N} g_i,$$

wobei die g_i Konjunktionen von Variablen und negierten Variablen sind. (Komplementär)

(Dual dazu ist jede Formel auch äquivalent zu einer *konjunktiven* Normalform

$$\bigwedge_{i=1}^{N} c_i,$$

wobei die c_i Disjunktionen von (negierten) Variablen sind.)

Hinweis. Verwenden Sie die folgende Regeln:

(a) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
(b) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
(c) $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$
(d) $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$

b) Formeln ϕ und ψ in Prädikatenlogik heißen logisch äquivalent, wenn

$$\models \phi \leftrightarrow \psi.$$

Eine Formel ϕ der Prädikatenlogik befindet sich in Pränexform, wenn sie von der Form

$$Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_k y_k \psi$$

ist, mit

$$k \geq 0 \text{ und } Q_1, \dots, Q_k \in \{\forall, \exists\}$$

und in ψ kein Quantor vorkommt. Zeigen Sie dass in der Prädikatenlogik gibt es zu jeder Formel eine logisch äquivalente Formel in Pränexform. (3)

c) Finden Sie eine äquivalente Formel in Pränexform zu der folgenden Formel:

$$\exists x P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x)$$

(1)