Abteilung für mathematische Logik
Mathematische Logik (SS 2014)
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Mohsen Khani

Übung zur Vorlesung
Aufgabe 6, Überprüfung
Abgabe am 16.6 vor 16:00 Uhr

Aufgabe (6-1)**.**

a) Sei L_R der Ring-Sprache. Zeigen Sie, dass die Klasse aller algebraisch abgeschlossene Körper der Charakteristik Null elementar ist: das heißt, geben Sie eine Menge Σ von Sätzen in L_R, sodass für jede L_R-Struktur $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models \Sigma$ genau dann, wenn $\langle M, +, \cdot, 0, 1\rangle$ ein algebraisch abgeschlossene Körper der Charakteristik Null ist. (2)

b) Zeigen Sie, dass der genannte Klasse nicht endlich axiomatisierbar ist (Sehen Sie Aufgabe 5-4). (2)

c) Man beweise, dass es algebraisch abgeschlossene Körper der Charakteristik Null der beliebige unendliche Größe gibt. (1)

d) Seien $\phi(x, \bar{y})$ eine Quantorenfrei Formel, und $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models \Sigma$, und $\mathfrak{M}$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{M} \models \exists x \phi(x, \bar{a})$ genau dann, wenn $\mathfrak{N} \models \exists x \phi(x, \bar{a})$, für jede $\bar{a} \in M$ (sehen Sie Aufgabe 2-2-c). (1)

Bemerkung. Die Menge Σ der Sätzen, die Sie in 2) gefunden haben, hat der folgende interessante Eigenschaft: für jede L_R Formel $\phi(\bar{x})$, es eine L_R–Formel $\psi_\phi(\bar{x})$ gibt, sodass ψ keine Quantoren hat und

$$\Sigma \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi_\phi(\bar{x})).$$

e) Seien $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models \Sigma$ und $\mathfrak{M}$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{M}$ auch eine elementare Unterstruktur von $\mathfrak{N}$ ist (Sehen Sie das “Theorem” in Aufgabe 5, vergleichen Sie es mit Aufgabe 5-1-2 und 5-1-5). (2)

f) Zeigen Sie, dass Σ auch die folgende Eigenschaft hat: für jede L_R-Aussage ϕ, entweder $\Sigma \models \phi$ oder $\Sigma \models \neg\phi$. (2)

Hinweis. Seien $M_1, M_2 \models \Sigma$ und ϕ eine Quantorenfrei Aussage. Wir haben: $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1) \subseteq M_1, M_2$. Deshalb, wenn $M_1 \models \phi$, dann $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1) \models \phi$, dann $M_2 \models \phi$.

g) Sei $\mathfrak{C} = \langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1\rangle$. Zeigen Sie, dass für jede L_R-Struktur $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models \Sigma$, genau dann wenn $\mathfrak{M} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{C})$. Man beachte, dass $\mathrm{Th}(\mathfrak{C})$ die Menge alle L_R–Sätze ϕ ist, dass $\mathfrak{C} \models \phi$. (1)

h) Sei ϕ eine L_R-Aussage. Zeigen Sie, dass die folgende äquivalent sind:

(a) $\mathfrak{C} \models \phi$.

(b) ϕ gilt in ein algebraisch abgeschlossene Körper der Charakteristik Null.

(c) es gibt $m \in \mathbb{N}$, sodass ϕ in jeder algebraisch abgeschlossene Körper der Charakteristik $p > m$ gilt. (2)

Aufgabe (6-2)**.** Sei M eine Menge von Aussagenvariablen. Wir geben $\{W, F\}$ die diskrete Topologie und versehen $\mathcal{B} = \{W, F\}^M$ die Produkttopologie.

1. Zeigen Sie, daß für jede aussagenlogische Formel f die Menge $\{\mu \in \mathcal{B} \mid \mu(f) = W\}$ abgeschlossen ist. (2)

2. Der Kompaktheitssatz der Aussagenlogik folgt nun aus der Kompaktheit von $\mathcal{B}$. (Nach dem Satz von Tychonoff ist das Produkt von kompakten Räumen wieder kompakt.) (2)