Abteilung für mathematische Logik
Mathematische Logik (SS 2014)
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Mohsen Khani

Übung zur Vorlesung
Aufgabe 7, Der Sequenzenkalkül und Normalformen
Abgabe am 23.6 vor 16:00 Uhr

Aufgabe (7-1)**.** Üben Sie das Umformen in pränexe Normalform, in Skolemnormalform, und in Herbrand-Normalform anhand der Formeln (vgl. die Beweise von die Skolem-Normalform Satz und der Herbrand- Normalform Folgerung):

1. $\neg(\neg\forall x(Rx \vee \exists z fx \doteq z) \vee \forall x(Px \to Pz))$
2. $\forall z(Sxz \wedge Sxy \to \exists w(Sxw \wedge Syw \wedge Szw))$

(4)

Aufgabe (7-2)**.** Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Herbrand, dass die Formel

$$\exists x(Rc \vee (\neg Rx \wedge Rhx) \vee \neg Rhhhc)$$

allgemeingültig ist. (4)

Aufgabe (7-3)**.** Wir wollen zeigen, dass man im Sequenzenkalkül die Disjunktion auch durch neue Regeln (statt als Abkürzung) definieren könnte. Wir schreiben $\sqcup$ für die neu einzuführende Disjunktion und ergänzen den Sequenzenkal durch die folgenden Regeln:

$\sqcup$–links-Regel $$\frac{\Delta \cup \{\phi\} \succ \Gamma, \Delta \cup \{\psi\} \succ \Gamma}{\Delta \cup \{(\phi \sqcup \psi\} \succ \Gamma}$$

$\sqcup$–rechts-Regel $$\frac{\Delta \succ \Gamma \cup \{\phi\}}{\Delta \succ \Gamma \cup \{(\phi \sqcup \psi)\}} \qquad \frac{\Delta \succ \Gamma \cup \{\psi\}}{\Delta \succ \Gamma \cup \{(\phi \sqcup \psi)\}}$$

Beweisen Sie im so erweiterten Sequenzenkalkül die Gültigkeit von $\phi \sqcup \psi \leftrightarrow (\phi \vee \psi)$ (4)

Aufgabe (7-4)**.** Es sei ϕ eine L-Formel und $\phi^* \in L^*$ eine Skolem-Normalform von ϕ. Weiter sei $\phi_* \in L_*$ eine Herbrand-Normalform von ϕ, also $\phi_* = \neg((\neg\phi)^*)$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $L^* \cap L_* \subseteq L$ gilt (warum?). Zeigen Sie:

1. Für alle L–Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A} \models \phi \Leftrightarrow$ für alle L_*-expansionen $\mathfrak{A}_*$ gilt $\mathfrak{A}_* \models \phi_*$.
2. Es gilt $\vdash \phi^* \to \phi_*$; es gibt also einen Interpolanten $\chi \in L$ mit $\vdash \phi^* \to \chi$ und $\vdash \chi \to \phi_*$.

3. Geben Sie einen Interpolanten χ an. Zeigen Sie, dass dieser bis auf logische Äquivalenz eindeutig bestimmt ist.

4. Zeigen Sie $\forall v \forall w R(v, fv, w, gvw) \rightarrow \exists x \exists y R(c, x, hx, y)$, und geben Sie einen Interpolanten an.

(4)