Abteilung für mathematische Logik
Mathematische Logik (SS 2014)
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Mohsen Khani

Übung zur Vorlesung
Aufgabe 8, Unterstrukturen, Resolutionsmethode, Interpolationssatz
Abgabe am 30.6 vor 16:00 Uhr

Aufgabe (8-1)**.**

1. Sei $\mathfrak{B}$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{A}$. Dann gilt für alle universellen $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ und alle $b_1, \ldots, b_n \in B$

$$\mathfrak{A} \models \phi[b_1, \ldots, b_n] \ \Rightarrow\ \mathfrak{B} \models \phi[b_1, \ldots, b_n].$$

(2)

2. Sei $\mathfrak{B}$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{A}$. Dann gilt für alle Quantorenfreien $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ und alle $b_1, \ldots, b_n \in B$

$$\mathfrak{A} \models \phi[b_1, \ldots, b_n] \ \Leftrightarrow\ \mathfrak{B} \models \phi[b_1, \ldots, b_n].$$

(2)

Aufgabe (8-2, Resolutionsmethode)**.**

1. Wie kann man von einer aussagenlogischen Formel "in Disjunktiver Normalform" schnell entscheiden, ob sie allgemeingültig ist? Wie kann man von einer aussagenlogischen Formel in "konjunktiver Normalform" schnell entscheiden, ob sie allgemeingültig ist? (Die erste ist die resolutionsmethode). (2)

2. Zeigen Sie (mit Resolutionsmethode), dass S allgemeingültig ist:

$$S = \big((\neg A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B)\big) \to A$$

(1)

3. Seien R_{ij} variablen, m, n natürliche Zahlen, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $k \in \{1, \ldots, m\}$. Sei

$$F = \bigwedge_i \bigvee_k R_{ik} \wedge \bigwedge_{i \neq j} \bigwedge_k (\neg R_{ik} \vee \neg R_{jk})$$

Schreiben Sei die Menge $\mathcal{C}$ von Klauseln. Zeigen Sie, dass F erfüllbar ist (=es gibt eine Belegung von Variablen mit dem F wahr ist) wenn $m \geq n$. Zeigen Sei dass $\neg F$ allgemeingültig ist wenn $m < n$. (2)

4. Sei $\mathcal{C}$ eine endliche Menge von Klauseln. Beweise Sie (Teil 2 der Lemma Seite 40): "aus $\mathcal{C}$ ergibt sich durch sukzessives Bilden von Resultanten genau dann die leere Klausel, wenn das gleiche für $\mathcal{C}|_p = W$ und für $\mathcal{C}|_p = F$ gilt". (2)

   Hinweis. Beweisen Sie nur die Umkehrung und verwenden Sie den Resolutionssatz.

Aufgabe (8-3, Interpolationssatz)**.** Sei L eine Sprache, $T(P)$ eine L–Theorie, deren Axiome zusätzlich ein neues einstelliges Prädikat P enthalten. $T(P)$ definiert P implizit, wenn

$$T(P) \cup T(P') \vdash \forall x(P(x) \leftrightarrow P'(x)).$$

Zeigen Sie den *Satz von Beth*: Wenn $T(P)$ das Prädikat implizit definiert, dann auch explizit. Das heißt, für eine L–Formel $\phi(x)$ gilt

$$T(P) \vdash \forall x\,(P(x) \leftrightarrow \phi(x)).$$

(4)

Hinweis. Ersetzen Sie x durch eine neue Konstante und verwende den Interpolationssatz.