**Abteilung für mathematische Logik**
Mathematische Logik (SS 2014)
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Mohsen Khani

Übung zur Vorlesung
Aufgabe 9, Mengenlehre
**Abgabe am 7.7 vor 16:00 Uhr**

**Aufgabe** (9-1)**.** Sei $T'$ eine konservative Erweiterung von $T$ und jede $L'$–Formel zu einer $L$–Formel $T'$–beweisbar äquivalent. Dann ist $T'$ äquivalent zu einer definitorischen Erweiterung von $T$. (Zwei Theorien heißen *äquivalent*, wenn sie die gleichen Modelle haben.) (4)

**Aufgabe** (9-2)**.** Zeigen Sie, daß das Paarmengenaxiom aus dem Ersetzungsaxiom, dem Potenzmengenaxiom und der Existenz der leeren Menge folgt. (4)

**Aufgabe** (9-3)**.** Sei $\mathfrak{P}_{<\omega}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ und $\beta\colon \mathbb{N} \to \mathfrak{P}_{<w}(\mathbb{N})$ eine Bijektion. Definiere $mE_\beta n \Leftrightarrow m \in \beta(n)$ und betrachte die $L_{Me}$–Struktur $(\mathbb{N}, E_\beta)$.

1. Welche Axiome von ZFC gelten in $(\mathbb{N}, E_\beta)$? (2)

2. Für die Bijektion

$$\beta(2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}) = \{n_1, \ldots, n_k\} \quad \text{(paarweise verschiedene } n_i\text{)}$$

   ist $(\mathbb{N}, E_\beta)$ *fundiert*: es gibt keine unendliche absteigendende Kette

$$n_0 \mathrel{\reflectbox{$E_\beta$}} n_1 \mathrel{\reflectbox{$E_\beta$}} n_2 \mathrel{\reflectbox{$E_\beta$}} n_3 \cdots .$$

   (2)

3. Geben Sie ein $\beta$ an, für das $(\mathbb{N}, E_\beta)$ nicht das Fundierungsaxiom erfüllt.(2 Bonuspunkte)

4. Geben Sie ein $\beta$ an, für das $(\mathbb{N}, E_\beta)$ nicht fundiert ist aber trotzdem das Fundierungsaxiom erfüllt. (2 Bonuspunkte)

   **Hinweis.** Ersetzen Sie $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{Z}$ und finde eine geeignete Bijektion $\beta\colon \mathbb{Z} \to \mathfrak{P}_{<\omega}(\mathbb{Z})$ mit $m \in \beta(n) \Rightarrow m < n$.

5. Zeigen Sie, daß alle fundierten $(\mathbb{N}, E_\beta)$ isomorph sind. (2 Bonuspunkte)

**Aufgabe** (9-4)**.** Wenn ZFC konsistent ist, hat ZFC ein Modell, das nicht fundiert ist. (4)

**Hinweis.** Verwenden Sie die Tatsache, daß es beliebig lange endliche $\in$–Ketten gibt, und den Kompaktheitssatz.