Nachklausur zur Vorlesung Mathematische Logik

Freiburg, SS 2013

Geben Sie am Ende Der Klausur Ihre Lösungen einschließlich dieses Deckblatts ab. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Viel Erfolg!

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Geburtsort: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
Punkte maximal	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Punkte erreicht													

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur und B eine nicht-leere Teilmenge von A, die die Interpretationen $c^{\mathfrak{A}}$ aller Konstanten enthält und unter allen Operationen $f^{\mathfrak{A}}$ abgeschlossen ist. Wenn man die Interpretation der Zeichen aus L auf B einschränkt, erhält man eine L-Struktur $\mathfrak{B}$, eine *Unterstruktur* von A.

(a) Zeigen Sie, daß der Durchschnitt einer Familie von Unterstrukturen von $\mathfrak{A}$ entweder leer ist oder wieder eine Unterstruktur.

(b) Kann man das gleiche über die Vereinigung sagen? Beweisen Sie die analogen Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei $L = \{P, R\}$ eine Sprache mit einstelligen Prädikatssymbolen P, R. Für jede der folgenden Aussagen finden Sie eine L-Struktur, in welcher sie falsch ist, und eine L-Struktur, in welcher sie wahr ist:

(a) $(\exists x P(x) \wedge \exists x R(x)) \to \exists x(P(x) \wedge R(x))$

(b) $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \to (\exists x P(x) \wedge \exists x R(x))$

(c) $\forall x(P(x) \wedge R(x)) \to (\forall x P(x) \wedge \exists x R(x))$

(d) $\exists x(P(x) \to \forall x P(x))$

(Achtung: In einigen Fällen kann es eine solche Struktur nicht geben ...)

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Ein Modell einer vollständigen Henkintheorie T^* heißt *Modell aus Konstanten*, wenn jedes Element Interpretation einer Henkinkonstante ist. Zeigen Sie, daß alle Modelle aus Konstanten isomorph sind.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

(a) Geben Sie eine Skolemnormalform für die folgenden Aussagen an.

  (i) $\forall x \exists y \ (R(x, y) \to \forall z S(x, z))$

  (ii) $\exists x \forall y \exists x \ R(x, y, x)$

(b) Beweisen Sie den folgenden Satz: Sei L eine Sprache mit mindestens einem Konstantensymbol. T sei eine universelle (d.h. alle Axiome sind universell) L-Theorie und

$$\phi = \exists x_1 \ldots \exists x_n \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

eine existentielle L-Aussage, die aus T folgt. Dann gibt es konstante Terme

$$t_1^1, t_2^1, \ldots t_n^1 \ldots t_1^N, t_2^N, \ldots t_n^N,$$

für die die quantorenfreie Aussage

$$\bigvee_{i=1}^{N} \psi(t^i) = \psi(t_1^1, t_2^1, \ldots t_n^1) \vee \ldots \vee \psi(t_1^N, t_2^N, \ldots t_n^N)$$

aus T folgt.

Aufgabe 5. *(4 Punkte)*
Beweisen Sie in ZFC: Eine Menge ist genau dann endlich, wenn sie eine lineare Ordnung besitzt, für die jede nicht-leere Teilmenge ein kleinstes und ein größtes Element hat.

Aufgabe 6. *(4 Punkte)*
Geben Sie zwei Beweise für den Satz von Schröder-Bernstein: Wenn es ein Injektionen von a nach b und von b nach a gibt, dann gibt es eine Bijektion von a und b:

(a) Mit dem Wohlordnungssatz und Eigenschaften von Ordinalzahlen, die in der Vorlesung bewiesen wurden.

(b) Ohne das Auswahlaxiom zu verwenden.

Aufgabe 7. *(4 Punkte)*
Zeigen sie: Falls $\mathsf{ZFC} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner\phi\urcorner) \to \phi$, dann $\mathsf{ZFC} \vdash \phi$.

Hinweis: Verwenden Sie den zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz für $\mathsf{ZFC} \cup \{\neg\phi\}$.

Aufgabe 8. *(4 Punkte)*
Was ist eine rekursive Funktion?

Aufgabe 9. *(4 Punkte)*
Wie beweist man, daß rekursive Funktionen in der Struktur der natürlichen Zahlen definierbar sind? Hinweis: Verwenden Sie den Satz über die Gödelsche β-Funktion.

Aufgabe 10. *(4 Punkte)*
Zeigen sie, daß eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ genau dann rekursiv ist, wenn sie und ihr Komplement rekursiv aufzählbar sind.

Aufgabe 11. *(4 Punkte)*
Beweisen Sie, daß

$$\{(\ulcorner\phi\urcorner, a) \mid \mathsf{Q} \vdash \phi(\Delta_a)\}$$

eine universelle rekursiv aufzählbare Relation ist.

Aufgabe 12. *(4 Punkte)*
Beweisen Sie in der Peanoarithmetik:

1. $\Delta_2 + \Delta_2 \doteq \Delta_4$.
2. Jede definierbare nicht-leere Menge hat ein kleinstes Element.