Klausur zur Vorlesung: Mathematische Logik

SS 2007

Die Klausur besteht aus zwei Teilen. Der Erhalt des Übungsscheines hängt **ausschließlich vom erfolgreichen Bearbeiten von Teil I ab**. Teil II dient dazu, die Noten festzulegen.

Geben Sie am Ende Der Klausur Ihre Lösungen einschließlich dieses Deckblatts ab. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Viel Erfolg!

Name: ....
Vorname: ....
Matrikelnummer: ....
Geburtsort: ....

Teil I

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Punkte maximal	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	20
Punkte erreicht											

Teil II

Aufgabe	A	B	C	D	E	F	Σ
Punkte maximal	4	4	4	4	4	4	24
Punkte erreicht							

Teil I

ALLE Antworten außer Antworten auf mit $*$ markierte Fragen bzw. Aufgaben müssen begründet werden!

Aufgabe 1 Es sei f ein zweistelliges Funktionszeichen, P ein einstelliges Relationszeichen und c ein Konstantenzeichen.

(i) Sind die folgenden Zeichenketten Terme, Formeln oder nichts von beidem?

fc
$fffcccc$
$\exists x\,(x \wedge \neg x)$
$(v_0 \doteq fcc \;\wedge\; \neg c \doteq fcv_0)$
$\exists v_0 P v_1$

(ii)* Markieren Sie in der folgenden Formel, welche Vorkommen von Variablen frei und welche gebunden sind. Geben Sie an, durch welchen Quantor die Variable jeweils gebunden wird.

$$\forall\, u\ \ (\forall x\ \ \forall y\ \ (Pz\ \rightarrow\ \exists x\ \ x \doteq y)\ \wedge\ (Px\ \rightarrow\ \neg Pu))$$

Aufgabe 2 Es sei $\mathrm{L} = \{+, \cdot, <, P\}$ und $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, <^{\mathbb{N}}, P^{\mathbb{N}})$, wobei $P^{\mathbb{N}}$ die Menge der Primzahlen bezeichne. Weiter sei β eine Belegung mit $\beta(x) = 2$. Gilt $\mathfrak{A} \vDash \varphi_i[\beta]$ für $i = 1, 2, 3$?

1. $\varphi_1 = \forall x \exists y\,(x < y\ \wedge\ Py)$
2. $\varphi_2 = \forall z\,(\exists y\, x \cdot y \doteq z \leftrightarrow \exists y\, y + y = z)$
3. $\varphi_3 = \forall x \exists y\, y < x$

Aufgabe 3 Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar, welche sind allgemeingültig?

1. $\forall x\,(((Px \rightarrow \neg Qx) \rightarrow Px)\ \wedge \neg Px)$
2. $\forall x \exists y R(x, y) \rightarrow \exists y \forall x R(x, y)$
3. $\exists y \forall x R(x, y) \rightarrow \forall x \exists y R(x, y)$

Aufgabe 4* Formulieren Sie den Vollständigkeitssatz und den Kompaktheitssatz.

Aufgabe 5* (Mengenlehre) Was ist eine natürliche Zahl? Was ist eine Ordinalzahl?

Aufgabe 6* Formulieren Sie den zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz für ZFC.

Aufgabe 7 Ist ZFC vollständig?

Aufgabe 8* Was ist eine rekursive Funktion?

Aufgabe 9 L sei eine endliche Sprache. Wann heißt eine L-Theorie entscheidbar?*
Gibt es eine unentscheidbare Theorie?

Aufgabe 10 Ist die Theorie

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{Gr}} = \{\ & \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2\, (v_0 \circ v_1) \circ v_2 \doteq v_0 \circ (v_1 \circ v_2),\\ & \forall v_0\, v_0 \circ e \doteq v_0,\\ & \forall v_0 \exists v_1\, v_0 \circ v_1 \doteq e\}.\end{aligned}$$

der Gruppen axiomatisierbar?

Teil II

Aufgabe A Sei L eine beliebige Sprache. Ist die Klasse aller endlichen L-Strukturen Modellklasse einer L-Theorie T ?

Aufgabe B* Geben Sie die Axiome des Hilbertkalküls an.

Aufgabe C Zeigen Sie: Wenn ZCF konsistent ist, so gibt es Modelle von ZFC, die (von außen) nicht fundiert sind.

Aufgabe D Zeigen Sie, daß aus dem Zornschen Lemma das Auswahlaxiom folgt.

Aufgabe E 1) Es sei

$$\varphi = \forall w \exists x \forall y \exists z (Rwy \vee Rxz).$$

Finden Sie eine Skolem-Normalform φ^* und eine Herbrand-Normalform φ_* von φ.

2) Ist für eine beliebige Aussage ψ eine der Implikationen $\psi^* \rightarrow \psi_*$, $\psi_* \rightarrow \psi^*$ allgemeingültig? Welche? Welche nicht?

Aufgabe F Zeigen Sie: Es gibt keine universelle rekursive Funktion $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$. (Eine universelle rekursive Funktion wäre eine rekursive Funktion, so daß für jede rekursive Funktion $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ein $e_g \in \mathbb{N}$ existiert mit $g(x) = f(e_g, x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$).