یادداشتهای نظریه‌ی مُدلی

ترجمه‌های جَسته و گریخته
محسن خانی

۲۴ فروردین ۱۳۹۴

فهرست مطالب

۱ قضیه‌ی رمزی

مطالب این بخش از [۱] گرفته شده‌اند. فرض‌ها و تعاریف لازم به قرارِ زیرند:

- X یک مجموعه است.
- κ و λ و μ سه کاردینال (ـِ شاید متناهی) اند.
- $[X]^\mu$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های با اندازه‌ی μ از X است.
- به هر نگاشتِ $f : [X]^\mu \to \lambda$ یک بخش بندی [۱] از $[X]^\mu$ گفته‌ایم.
- گوئیم $Y \subseteq X$ برای بخش بندیِ f همگن [۲] است هرگاه یک $\alpha < \lambda$ باشد که برای همه‌ی $A \in [Y]^\mu$ بداریم $f(A) = \alpha$. (یعنی f روی $[Y]^\mu$ ثابت باشد).
- برای سه کاردینالِ κ, η, μ نمادِ $\kappa \to (\eta)^\mu_\lambda$ یعنی هرگاه $|X| \geq \kappa$ و $f : [X]^\mu \to \lambda$ یک بخش بندی از $[X]^\mu$ باشد، آنگاه یک $Y \subseteq X$ همگن برای f چنان هست که $|Y| \geq \eta$.

قضیه ۱ (قضیه‌ی رمزی)**.** اگر $k, n < \omega$ آنگاه $\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_k$.

قضیه‌ی رمزی [۳] را شاید که تعمیم اصل لانه کبوتری دانست: $n \to (2)^1_{n-1}$ یعنی، اگر n عنصر در $n-1$ لانه گذاشته شوند دو تای آنها هم‌لانه خواهند بود. پیش از بیانِ اثباتِ قضیه، مزه‌ی آن را در کاربرد زیر می‌چشیم: این را که «هر دنباله‌ی $(r_0, r_1, \ldots)$ از اعداد حقیقی دارای یک زیردنباله‌یکنوا است»، می‌توان چنین ثابت کرد: تابعِ $f : \mathbb{N}^2 \to 3$ را با ضابطه‌ی

$$f(\{i,j\}) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i<j \text{ و } r_i < r_j \\ 1 & \text{اگر } i<j \text{ و } r_i = r_j \\ 2 & \text{اگر } i<j \text{ و } r_i > r_j \end{cases}$$

در نظر بدارید. بنا به قضیه‌ی رمزی، یک $Y \subseteq \mathbb{N}$ همگرا برای f هست. فرض کنید $j_0, j_1, \ldots$ شمارشی از Y باشد. یک $c < 3$ چنان هست که برای هر $m < n$، $f(\{j_m, j_n\}) = c$. بسته به این که c کدام از میانِ ۰ و ۱ و ۲ باشد، دنباله‌ی $r_{j_0}, r_{j_1}, \ldots$ صعودی یا نزولی یا ثابت خواهد بود.

۲ دنباله‌های بازنشناختنی

تعریف ۲. فرض کنید I یک مجموعه ی متناهی و $X = \{a_i | i \in I\}$ مجموعه‌ای از عناصرِ متمایزِ مدلِ M باشد. گوئیم که X یک مجموعه‌ی بازنشناختنی [۴] است اگر برای هر $m \in \mathbb{N}$ هرگاه که $i_1, \ldots, i_m$ و $j_1, \ldots, j_m$ هر یک دنباله‌ای از عناصرِ دو به دو متمایزِ I باشند، برای هر فرمولِ $\phi(x_1, \ldots, x_m)$ داشته باشیم:

$$M \models \phi(a_{i1}, \ldots, a_{im}) \leftrightarrow \phi(a_{j1}, \ldots, a_{jm})$$

[۱] partition
[۲] homogeneous
[۳] Ramsey's theorem
[۴] indiscernible set

برای نمونه اگر F یک میدانِ بسته‌ی جبری با درجه‌ی تعالیِ بی نهایت باشد و $X = \{a_1, \ldots\}$ یک مجموعه‌ی نامتناهیِ مستقلِ جبری، آنگاه X بازنشناختنی است؛ زیراکه برای هر $i_1, \ldots, i_m$ و $j_1, \ldots, j_m$ بمانند بالا، یک اتومرفیسم σ از F هست که $\sigma(a_{ik}) = a_{jk}$.

عموماً ازمجموعه‌های بازناشناختنی روی مدل هیولا سخن می‌رانند و آنگاه درتعریف می‌گویند که برای هر $i_1, \ldots, i_m$، $\mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_m) = \mathrm{tp}(a_{i1}, \ldots, a_{im})$. بیان دیگر این است که هر تایپِ $\mathrm{tp}(a_{i1}, \ldots, a_{im})$ تنها به تایپِ $i_1, \ldots, i_m$ در زبانِ تساوی بستگی دارد.

از بختِ بد، بسیاری از ساختارها هیچ مجموعه‌ی نامتناهی‌ای از بازنشناختنی ها ندارند. برای نمونه اگر $(A, <)$ یک ترتیبِ خطی باشد، برای این که $\{a, b\}$ در یک مجموعه از بازنشناختنی‌ها بیفتد، باید هم $a < b$ و هم $b < a$. شگفتا که تنها مانع هم همین است! این است که در اندیشه‌ی «دنباله‌های بازنشناختنی» به جای «مجموعه‌های بازنشناختنی» می افتیم. در ادامه، آرایه‌های بازنشناختنی هم معرفی خواهند شد.

تعریف ۳. بگذارید $(I, <)$ یک ترتیبِ خطی و $(x_i)_{i \in I}$ دنباله‌ای از اعضای متمایزِ M باشد. می‌گوئیم $(x_i)_{i \in I}$ دنباله‌ای از ترتیب‌بازنشناختنی‌ها است اگر چنان باشد که در زیر آمده است: هر گاه که $i_1 < \ldots < i_m$ و $j_1, \ldots, j_m$ دو دنباله‌ی صعودی در I باشند، آنگاه برای هر فرمولِ $\phi(x_1, \ldots, x_m)$ داریم

$$M \models \phi(x_{i_1}, \ldots, x_{im}) \leftrightarrow \phi(x_{j_1}, \ldots, x_{jm}).$$

درونمایه‌ی تعریفِ بالا این است که ترتیبِ چیدمانِ عناصرِ دنباله نسبت به هم، فرمول‌هائی را که آنها برمی‌آورند را معین می‌کند. به بیانِ دیگر، $\mathrm{tp}(x_{i1}, \ldots, x_{im})$ تنها به $\mathrm{tp}_{<=}(i1, \ldots, im)$ (تایپ مجموعه‌ی اندیس در زبانِ کمتری و تساوی) بسته است.

قضیه ۴. فرض کنید T یک تئوری باشد که مدلِ نامتناهی دارد. برای هر ترتیبِ خطیِ نامتناهیِ $(I, <)$ یک $M \models T$ هست که در آن دنباله‌ای چون $(x_i)_{i \in I}$ از بازنشناختنی‌ها جای گرفته باشد.

۱.۲ نحوه‌ی به دست آوردن دنباله‌ی بازناشناختنی با کمکِ رمزی

مدلِ هیولای M را به همراه یک ترتیب روی آن در نظر بگیرید: $(M, <)$. فرض کنید $\Delta = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ یک مجموعه‌ی متناهی از فرمول‌ها (ی شاید با پارامتر) باشد. با کمک رمزی می‌خواهیم نشان دهیم که‌یک دنباله‌ی نامتناهیِ Δ- بازنشناختنی هست. فرض می‌کنیم m تعداد متغیر در فرمولهای Δ باشد. نگاشتِ $f : [M]^m \to P(\Delta)$ را به گونه‌ی زیر تعریف می‌کنیم: که اگر $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$ از اعضای یک زیرمجموعه‌ی m عضویِ M باشند، آنگاه

$$f(\{a_1, \ldots, a_m\}) = \{\phi | M \models \phi(a_1, \ldots, a_m)\}.$$

حال بنا به رمزی یک زیرمجموعه‌ی شمارا از M هست که F همه‌ی اعضایش را به یک عنصر می برد. فرض کنید این زیر مجموعه، دنباله‌ی $Y = (c_i)$ باشد و F روی آن مقدار ثابتِ S بگیرد. آنگاه برای هر فرمولِ $\phi \in \Delta$ و هر $c_{i1} < \ldots < c_{in}$ در این دنباله

$$M \models \phi(c_{i1} <, \ldots < c_{in}) \Leftrightarrow \phi \in S \qquad (1)$$

و این معادلِ همان است که می‌خواهیم.

۳ بیان دوباره و اثبات قضیه‌ی رمزی

قضیه ۵. فرض کنید A یک مجموعه‌ی متناهی باشدو $n \in \mathbb{N}$. فرض کنید $A^{[n]}$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های n عضویِ A باشد. فرض کنید اعضای $A^{[n]}$ را با k رنگ (k متناهی) رنگ‌آمیزی کرده باشیم. آنگاه یک زیرمجموعه‌ی نامتناهیِ B از A هست که همه‌ی زیرمجموعه‌های n عضویِ آن همرنگند.

اثبات. برای $n = ۱$ حکم از اصلِ لانه‌ی کبوتری نتیجه می‌شود. فرض کنید حکم برای n درست باشد. فرض کنید $A^{[n+۱]}$ با k به نام‌های رنگ اول، رنگ دوم، .. و رنگ k اُم رنگ‌آمیزی شده باشد. فرض کنید $a_۰ \in A$. حال $[A - \{a_۰\}]^n$ را اینگونه با k رنگ، رنگ آمیزی کنید: اگر $C \subseteq A - \{a_۰\}$ یک مجموعه‌ی n عضوی باشد، آن را رنگِ i ام کنید هرگاه $c \cup \{a_۰\}$ در رنگ‌آمیزیِ $[A]^{n+۱}$ رنگِ i ام داشته بوده باشد. بنا به فرضِ استقرا یک $B_۱ \subseteq A - \{a_۰\}$ هست که نامتناهی است و همه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های n عضویِ آن همرنگند. بنابراین همه‌ی زیرمجموعه‌ی $n + ۱$ عضویِ A که شاملِ $a_۰$ اند و n عضو دیگرشان از $B_۱$ می‌آید همرنگند. حال یک $a_۱ \in B_۱$ را در نظر بگیرید و روندِ فوق را برای $B_۱ - \{a_۱\}$ تکرار کنید تا به یک $B_۲$ برسید. با تکرارِ این روند به زنجیری مانند زنجیر زیر می‌رسیم:

$$A_۰ = B_۰ \supseteq B_۱ \supseteq B_۲ \supseteq \dots$$
$$a_۰ \in B_۰, a_۱ \in B_۱, a_۲ \in B_۲, \dots$$

مجموعه‌ی $B = \{a_۰, a_۱, \dots\}$ را در نظر بگیرید.
همه‌ی زیرمجموعه‌های $n + ۱$ عضویِ B که شاملِ $a_۰$ اند همرنگند.
همه‌ی زیرمجموعه‌های $n + ۱$ عضویِ B که شاملِ $a_۱$ اند همرنگند.
...
و به این ترتیب، برای هر i، همه‌ی زیرمجموعه‌های $n + ۱$ عضویِ B که شاملِ a_i اند، همرنگند.
ازآن‌جاکه تعداد رنگ‌ها متناهی است، در بالا نام یک رنگ، مثلا رنگ «مورد نظر» بی‌نهایت بار تکرار می‌شود. بگیرید

$$C = \{a | \text{ و همه‌ی زیرمجموعه‌های } n+۱ \text{ عضویِ } B \text{ شاملِ } a_i \text{ به رنگِ «مورد نظر» اند } a \in B\}$$

□

۴ لمِ استاندارد

مطالب این بخش و چندبخشِ آتی عموماً از [۲] ترجمه شده است. نمادِ $\mathbb{M}$ همیشه برای مدل هیولای بسیار اشباع به کار گرفته شده است.

لمِ استاندارد از پرکاربردترین لم‌ها در مباحث پیش رو است. این لم عموماً برای در آوردنِ دنباله‌های بازنشناختنی یا اثباتِ وجودِ آن‌ها به کار می آید. فرض های این لم یک دنباله‌ی نامتناهیِ $\mathcal{I} = (a_i)_{i \in I}$ از چندتائی ها، یک ترتیبِ خطیِ J و یک مجموعه‌ی پارامترِ A است. آن‌چه این لم به دست می‌دهد، یک دنباله‌ی $\mathcal{J} = (b_j)_{j \in J}$ است که روی A بازنشناختنی است و برای هر فرمولِ $\phi(x_۱, \dots, x_n)$ با پارامتر در A، اگر همه‌ی n عنصرهای پشت سر هم (یکی از بعدی کوچک تر)در $\mathcal{I}$ این فرمول را برآورند، همه‌ی n عنصرهای

پشت سر هم با ترتیبِ J در دنباله‌ی $(b_j)_{j\in J}$ هم این فرمول را برمی آورند. به بیان نارسمی تر، این لم قرار است بگوید:

$$\forall \mathcal{I}=(a_i)_{i\in I}, \exists \mathcal{J}=(b_j)_{j\in J} \text{ (بازنشناختنی)}$$
$$\forall \phi(x_1,\ldots,x_n)\Big(\forall i_1<i_2<\ldots<i_n\in I \quad \phi(a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_n})$$
$$\Rightarrow \forall j_1<\ldots<j_n\in J \quad \phi(b_{j_1},\ldots,b_{j_n})\Big)$$

لم ۶ (لمِ استاندارد). بگذارید A یک مجموعه‌ی پارامتر، $\mathcal{I}$ یک دنباله‌ی نامتناهی از چندتائیها (با اندیسِ I) و J یک ترتیبِ خطی باشد. آنگاه یک دنباله‌ی $\mathcal{J}$ از بازنشناختنیهای روی A با نوعِ ترتیبِ J یافت می‌شود که (I/A)**ای ام** را بر می آورد. منظور از $(\mathcal{I}/A)$**ای ام**، یا **تایپِ اِهغنفُیْشتْموستُوْسْکیِ** [5] [6] آی روی آ، مجموعه‌ی همه‌ی $L(A)$–فرمولهائی چون $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ برای همه‌ی n هاست که برای همه‌ی $i_1<\ldots<i_n\in I$ و $\mathbb{M}\models\phi(a_{i_1},\ldots,a_{i_n})$.

۵ کاربُردِ قضیه‌ی اردوش ـ رادو برای بدست آوردن بازنشناختنی‌ها

همان‌طور که دیدیم از قضیه‌ی رمزی می‌توان برای یافتن دنباله‌های بازنشناختنی استفاده کرد. بااین‌حال در نظریه‌ی مدل برای یافتن دنباله‌های بازنشناختنی روی یک مجموعه‌ی پارامتر، عموماً از نتیجه‌ای از قضیه‌ی اردوش ـ رادو [7] استفاده می‌کنند که نخست به توجهِ شِلاخ [8] رسیده است. این نتیجه را (نتیجه‌ی ۹) در ادامه آورده‌ایم ولی پیش از آن بهتر است «ب» ها را تعریف کنیم. خلاصه‌ی آن‌چه که در این‌جا بیان خواهیم کرد این است: **از دلِ یک دنباله‌ی بسیار بزرگ، می‌شود یک دنباله‌ی بازنشناختنی بیرون کشید. اگر یک دنباله داشتیم که اندازه‌ی آن بسیار بزرگ‌تر از اندازه‌ی زبان‌مان و اندازه‌ی مجموعه‌ی پارامترِ موردنظرمان باشد، این دنباله، زیردنباله‌ای دارد که روی مجموعه‌ی پارامترمان بازنشناختنی است. در بخش‌های آینده مشابه همین حکم را برای آرایه‌ها بیان و اثبات خواهیم کرد.**

تعریف ۷. فرض کنید κ یک کاردینالِ نامتناهی باشد و α یک اوردینال. با استقراء، $\beth_\alpha(\kappa)$ را چنین تعریف می‌کنیم که $\beth_0(\kappa)=\kappa$ و

$$\beth_\alpha(\kappa)=\sup_{\beta<\alpha} 2^{\beth_\beta(\kappa)}.$$

بنا بر تعریف بالا $\beth_1(\kappa)=2^\kappa$.

قضیه ۸ (قضیه‌ی اردوش ـ رادو).

$$\beth_n(\kappa)^+\to(\kappa^+)^{n+1}_\kappa.$$

نتیجه ۹ ([۳]). بگذارید B یک مجموعه‌ی پارامتر باشد و κ یک کاردینال باشد. برای هر دنباله‌ی $(\bar{a}_i)_{i<\beth_{2(|T|+|B|+\kappa)^+}}$ که از چندتائی‌های $\bar{a}_i$ با $|\bar{a}_i|=\kappa$ درست شده است، یک دنباله‌ی B ـ بازنشناختنیِ $(\bar{a}'_j)_{j<\omega}$ پیدا می‌شود با این ویژگی که برای هر $k<\omega$ عناصرِ $i_0<i_1<\ldots<i_{k-1}$ در میانِ پانویس‌های دنباله‌ی $(\bar{a}_i)$ یافت می‌شوند که $\bar{a}_{i_0}\bar{a}_{i_1}\ldots\bar{a}_{i_{k-1}}\equiv_B \bar{a}'_0\bar{a}'_1\ldots\bar{a}'_{k-1}$.

[5] Ehrenfeucht– Mostowski type

[6] «ه» در «اهغن» خوانده نمی‌شود و تنها برای کشیدن بیشترِ «اِ» می آید.

[7] Erdös–Rado

[8] Shelah

۶ بخش شدن و فُرکیدن

تعریفِ «بخش شدن» [۹] نخست پیچیده به نظر می‌رسد. مدلِ هیولای اشباعِ $\mathbb{M}$ را برجا بدارید که همه‌ی عناصر از آن می آیند و همه‌ی مجموعه‌ها، زیرمجموعه‌های آنند. یک فرمولِ پارامتر دار را در نظر بگیرید. تایپِ پارامترِ این فرمول را روی یک مجموعه‌ی A در نظر بگیرید. اگر این فرمول بخش شود، دنباله‌ای هست که عناصرش روی A با این پارامتر هم تایپ اند ولی اگر اعضای این دنباله را یکی یکی جای‌گزینِ پارامترِ اولیه کنیم، به یک مجموعه‌ی ناسازگار می رسیم.

تعریف ۱۰ (بخش شدن). فرمولِ $\phi(x,b)$ روی A (نسبت به k) بخش می‌شود هر گاه اقلام زیر رخ دهند.

۱. یک دنباله‌ی $B=(b_i)_{i<\omega}$ از عناصر هست که $b_i\equiv_A b$ (یعنی $b_i\models\mathrm{tp}(b/A)$)

۲. $\phi(x,B)$ یک مجموعه‌ی k ناسازگار است (منظور از $\phi(x,B)$ مجموعه‌ی $\{\phi(x,b_i):i<\omega\}$ است). به بیان دیگر اشتراک همه‌ی مجموعه‌های $\phi(\mathbb{M},b_i)=\{x:\phi(x,b_i)\}$ تهی است.

یک مجموعه‌ی $\pi(x)$ از فرمولها روی A بخش می‌شود هر گاه فرمولی چون $\phi(x,b)$ را نتیجه دهد که روی A بخش می‌شود.

توجه کنید که اگر $\phi(x,a)$ فرمولِ $\psi(x,b)$ را نتیجه دهد که روی A بخش می‌شود، آنگاه خودِ $\phi(x,a)$ هم روی A بخش می‌شود. از این گفته برمی آید که اگر $\phi(x,a)$ و $\psi(x,b)$ روی A بخش شوند، عطفشان، $\phi(x,a)\wedge\psi(x,b)$ هم بخش می‌شود. اگر $\phi(x,a)$ و $\psi(x,b)$ روی A بخش شوند، درباره‌ی فصلشان $\phi(x,a)\vee\psi(x,a)$ که روی A بخش شود یا خیر، نتوان آسان نظر داد (این رویداد با فُرکیدن وابسته است). هم چنین نتیجه می‌شود که تایپِ جزئی π وقتی و تنها وقتی روی A بخش می‌شود که «عطفی» از فرمولهای درآن روی A بخش شوند. در زیر یکی از این احکام را ثابت کرده‌ایم:

لم ۱۱. اگر $\psi(x,c)$ روی A بخش شود، آنگاه هر فرمولی که آن را نتیجه دهد (مثلاً $\phi(x,b)$) نیز روی A بخش می‌شود.

اثبات. فرض کنید
$$\phi(x,b)\vdash\psi(x,c)$$
و فرض کنید دنباله‌ی $C=(c_i)_{i\in\omega}$ که $c_i\equiv_A c$ گواهِ بخش شدنِ $\psi(x,c)$ باشد. این دنباله را می‌توان به دنباله‌ی (b_ic_i) گستراند که $b_i\equiv_A b$ و $b_ic_i\equiv_A bc$. بنابراین برای هر i داریم $\models\phi(x,b_i)\models\psi(x,c_i)$.
حال اگر $\psi(x,C)$ ناسازگار باشد، هم چنین است $\phi(x,B)$ که $B:=(b_i)$. □

مثال ۱۲. در دی اِل اُ، فرمولِ $b_1<x<b_2$ روی تهی بخش می‌شود. تایپِ $\{x>a|a\in\mathbb{Q}\}$ روی تهی بخش نمی‌شود.

ملاحظه ۱۳. اگر $a\notin\mathrm{acl}(A)$ آنگاه $\mathrm{tp}(a/aA)$ روی A بخش می‌شود (می‌نویسیم: $a\not\mathop{\smile\hskip -0.9em ^| \ }^d_A a$). اگر $\pi(x)$ سازگار و روی $\mathrm{acl}(A)$ تعریف شده باشد، روی A بخش نمی‌شود. فرض کنید $\phi(x,a)$ روی A بخش شود و $a\mathop{\smile\hskip -0.9em ^| \ }^d_A b$. آنگاه $\phi(x,b)$ روی Ab بخش می‌شود.

لم ۱۴. مجموعه‌ی $\pi(x,b)$ روی A اگر و تنها اگر بخش می‌شود که دنباله‌ای چون $(b_i)_{i<\omega}$ از بازنشناختنیها روی A باشد که $\mathrm{tp}(b_0/A)=\mathrm{tp}(b/A)$ و $\bigcup_{i<\omega}\pi(x,b_i)$ ناسازگار است.

[۹] dividing (over a set of parameters)

اِی سی اف را در نظر بگیرید. فرض کنید $K \subseteq L$ دو مدل از آن باشند. انتظار داریم تایپِ q که می گوید x روی L متعالی است روی p بخش نشود (یعنی گسترشِ بخش‌نکننده‌ای از تایپِ p باشد که می گوید x روی K متعالی است). K متعالی است بخش نشود.

قضیه ۱۵. شماره‌های زیر معادل اند:

۱. $\mathrm{tp}(a/Ab)$ روی A بخش نمی‌شود (عموماً برای این می نویسیم: $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{d}_{A} b$؛ [10] حرف دی را برای این روی لنگر گذاشته‌ایم که یادآریم سخن از بخش شدن یا دیوایدنیگ به انگلیسی است.)

۲. برای هر دنباله‌ی نامتناهیِ I از A–بازنشناختنیها دربردارنده‌ی b، یک a' هست که $\mathrm{tp}(a'/Ab) = \mathrm{tp}(a/Ab)$ و I روی Aa' بازنشناختنی است. (یعنی یک دنباله‌ی A–بازنشناختنیِ شاملِ b می‌تواند Aa'–بازنشناختنی شود، برای یک a' که شبیه a است)

$$I = (b_i), b_\circ = b$$
I روی A بازنشناختنی
$$\exists a' \equiv_{Ab} a$$
I روی Aa' بازنشناختنی

۳. برای هر دنباله‌ی I از A–بازنشناختنیها در بردارنده‌ی b، یک I' هست که $\mathrm{tp}(I'/Ab) = \mathrm{tp}(I/Ab)$ و I' روی Aa بازنشناختنی است.

اثبات. حکمِ دو و سه را به هم آمیخته بجایشان حکم تازه‌ی زیر را ثابت می‌کنیم:

حکم تازه a' و I' ای هستند که $\mathrm{tp}(a'/Ab) = \mathrm{tp}(a/Ab)$ و $\mathrm{tp}(I'/Ab) = \mathrm{tp}(I/Ab)$ و I' روی Aa' بازنشناختنی است.

اثبات حکم تازه از ۱. بگذارید $I = (b_i)_{i \in I}$ یک دنباله‌ی نامتناهی از بازنشناختنیها باشد که $b_{i_\circ} = b$. بگیرید $p(x,y) = \mathrm{tp}(ab/A)$. آنگاه $\bigcup_{i \in I} p(x, b_i)$ سازگار است (بنا به لمِ پیش) و عنصری چون a' آن را برآورده می‌کند. بنا به لمِ استاندارد یک $I'' = (b''_i)_{i \in I}$ هست بازنشناختنی روی Aa' و برآورنده‌ی (I/Aa')**ای ام**. از آن جا که $\models p(a', b''_{i_\circ})$، اوتومرفیسمی چون $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{M}/Aa')$ هست که $b''_{i_\circ}$ را به b می‌برد. بگیرید $I' = \alpha(I'')$.

از ۲ به ۱. بگیرید $p(x,y) = \mathrm{tp}(ab/A)$ و بگذارید $(b_i)_{i<\omega}$ یک دنباله‌ی بازنشناختنی روی A باشد که $\mathrm{tp}(b_\circ/A) = \mathrm{tp}(b/A)$. باید نشان دهیم که $\bigcup_{i<\omega} p(x, b_i)$ سازگار است. بنا به فرض، a' ای هست که $\mathrm{tp}(a'/Ab) = \mathrm{tp}(a/Ab)$ و I روی Aa' بازنشناختنی است. از آن جا که $\models p(a', b)$، a' برآورنده‌ی $\bigcup_{i<\omega} p(x, b_i)$ است. □

$\mathrm{tp}(a/Ab)$ روی a بخش نمی‌شود یعنی این تایپ، نسبت به $\mathrm{tp}(a/A)$ اطلاعات بیشتری درباره‌ی a ندارد. یعنی این که b در شناسائیِ a کمکی به A نمی‌کند. این با توجه به بندِ دو قضیه، یعنی اگر یک سری عناصر داشته باشیم که از دیدِ A همان b اند، $(b_i) \equiv_A b$، آنگاه عنصری کاملا شبیه به a هست که درباره‌ی آنها هیچ نمی‌داند ((b_i) روی Aa نیز بازنشناختنی است.)

[10] $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{f}_{A} b$ هم به گونه‌ی مشابه برای فُرکیدن تعریف می‌شود.

گزاره ۱۶. اگر $\mathrm{tp}(a/B)$ روی $A \subseteq B$ بخش نشود و $\mathrm{tp}(c/Ba)$ روی Aa بخش نشود، آنگاه $\mathrm{tp}(ac/B)$ روی A بخش نمی‌شود.

$$a \underset{A}{\overset{d}{\downarrow}} B$$
$$c \underset{Aa}{\overset{d}{\downarrow}} Ba$$
$$\Rightarrow ac \underset{A}{\overset{d}{\downarrow}} B$$

اثبات. فرض کنید $b \in B$ یک چندتائیِ متناهی و I یک دنباله‌ی نامتناهی از A–بازنشناختنیها شامل b باشد. اگر $\mathrm{tp}(a/B)$ روی A بخش نشود I' ای با $\mathrm{tp}(I'/Ab) = \mathrm{tp}(I/Ab)$ و بازنشناختنی روی Aa یافت می‌شود. اگر $\mathrm{tp}(c/Ba)$ روی Aa بخش نشود یک I'' یافت می‌شود که روی Aac بازنشناختنی است و $\mathrm{tp}(I''/Aab) = \mathrm{tp}(I'/Aab)$ و که این آنچه را که می‌خواهیم به دست می‌دهد. □

تعریف ۱۷. مجموعه‌ی $\pi(x)$ از فرمولها روی A می فُرکد [۱۱] هرگاه فَصلی چون $\bigvee_{l<d} \phi_l(x)$ از فرمولهائی را نتیجه دهد که هر یک روی A بخش می‌شود.

ملاحظه ۱۸ (نافُرکِش بسته است). اگر $p \in S(B)$ روی A بفُرکد، یک فرمولِ $\phi(x) \in p$ هست که همه‌ی تایپ‌های در $S(B)$ که شامل این فرمولند روی A می‌فرکند.

نتیجه ۱۹ (مشخّصه‌ی متناهی). اگر $p \in S(B)$ روی A بفرکد، زیرمجموعه‌ی متناهی‌ای چون $B_\circ \subseteq B$ هست که $P \restriction_{AB_\circ}$ روی A می‌فرکد.

لم ۲۰. اگر π در A متناهیاً برآورده شود، روی آن نمی فُرکد.

اثبات. اگر π فصلِ $\bigvee_{l<d} \phi_l(x,b)$ را نتیجه دهد، یکی از ϕ_l ها با عنصری چون a در A برآوررده می‌شود. اگر $(b_i : i < \omega)$ تایپِ b روی A را برآورند، آنگاه a مجموعه‌ی $\{\phi_l(x,b_i) : i < \omega\}$ را برمی‌آورد. نتیجه معلوم است.

□

لم ۲۱. بگذارید $A \subseteq B$ و π یک تایپ جزئی روی B باشد. اگر π روی A نفرکد، می‌شود آن را به یک $p \in S(B)$ گُستراند که همچنان روی A نمی‌فرکد.

اثبات. p را مجموعه‌ی ماکزیمالی از $L(B)$–فرمولها بگیرید که شامل π است و روی A نمی‌فُرکد. □

[۱۱] فعلِ «فُرکیدن» را به این دلیل ساخته ام که احساس کردم اضافه شدن این بن فعلی کارگشا خواهد بود. انگلیسیِ آن «a formula forks» است. فعلِ فُرک در انگلیسی به معنی دوشاخه شدن است. برای این که از ترمینولوژی بحث فاصله نگیریم از واژه‌ی فرکیدن بهره جُسته‌ایم .

۷ ویژگیهای فُرکیدن و بخش شدن

۱. فرض کنید $\phi(x,a)$ روی A بخش شود و $a \perp^d_A b$. آنگاه $\phi(x,b)$ روی Ab بخش می‌شود.

۲. فرمول $\phi(x,b)$ روی A بخش می‌شود اگر و تنها اگر یک دنباله‌ی A–بازنشناختنیِ $(b_i)_{i<\omega}$ باشد که جمله‌ی نخست آن b است و $\bigcap_i \phi(x,b_i)=\emptyset$ (منظور این است که مجموعه‌ی فرمولهای $\{\phi(x,b_i)\}$ ناسازگار است.)

۳. اگر $\pi(x)$ یک تایپ جزئی روی A باشد که سازگار است، روی A بخش نمی‌شود. (شاید بفرکد؛ اثبات را ببینید).

اثبات. فرض کنید π فرمولِ روی A بخش شونده‌ی $\phi(x,b_0)$ را نتیجه دهد و دنباله‌ی $(b_i)_{i\in\omega}$ شاهدِ این بخش باشد. آنگاه برای هر i داریم $\phi(x) \vdash \phi(x,b_i)$. بنابراین مجموعه‌ی $\{\phi(x,b_i)\}$ از فرمولها سازگار است. □

۴. اگر $\pi(x)$ «در A» متناهیاً برآورده شود، روی آن نمی فُرکد. (با شماره‌ی پیشین مقایسه کنید)

۵. در تعریف بخش شدن یک تایپ جزئی گفتیم که π روی A بخش می‌شود هر گاه فرمولی چون $\phi(x,a)$ را نتیجه دهد که او بخش می‌شود. می‌توان $\phi(x,a)$ را عطفی از چند فرمولِ π انگاشت.

۶. اگر تایپِ جزئیِ $\pi(x)$ روی A بخش کند (بِفُرکد) آنگاه یک زیرتایپِ متناهی (تعداد متناهی فرمول) از آن چنین می‌کند.

۷. اگر $A \subseteq M$ و M یک مدلِ $|A|^+$ اشباع و $p(x)$ یک تایپ کامل روی M باشند، آنگاه p روی A می فُرکد اگر و تنها اگر روی آن بخش شود.

اثبات. فرض کنید $p(x)$ فصلی چون $\bigvee_{i<n}\phi_i(x,a_i)$ از فرمولهائی را نتیجه دهد که هر یک روی A بخش می‌شوند. آنگاه تحدیدِ $p(x)$ به یک زیرمجموعه‌ی متناهیِ C_0 از M، این عطف را نتیجه می‌دهد. بگیرید: $C=C_0\cup A$. حال از اشباعیِ M یک b' در M به دست می‌آید که

$$b' \equiv_C b.$$

برای هر x داریم

$$p(x)|_{C_0} \models \bigvee \phi_i(x,b')$$

یکی از فرمولهای $\phi_i(x,b')$ باید در p باشد و از این رو این تایپ بخش می‌شود. □

۸. فرض کنید $A\subseteq B$ و $\pi(x)$ یک تایپ جزئی روی B باشد. آنگاه، π روی A نمی‌فُرکد اگروتنهااگر که گسترشی از آن به یک تایپِ جهانی کامل، روی A بخش نشود (معادلاً نفرکد). «از این رو، π می‌فُرکد اگروتنهااگر همه‌ی گسترش های جهانیِ کاملش بفرکند». این خاصیت بر ای بخش شدن برقرار نیست و همین، یکی از برتری های فرکیدن و گسترش های فرکان به بخش شدن و گسترش های بخش شونده است.

اثبات. بگذارید π یک تایپ جزئی باشد که همه‌ی تایپ جهانی شامل آن بخش شوند. بگیرید

$$\Sigma(x)=\{\neg\phi(x,a): \text{در مدلِ هیولا است و این فرمول روی } A \text{ بخش می‌شود } a\} \qquad (۲)$$

اگر $\pi\cup\Sigma$ سازگار باشد به تایپی جهانی گسترش می یابد که بخش نشود و این تناقض است. بنابراین زیرمجموعه‌ای متناهی چون $\Sigma_\circ$ از Σ هست که $\pi\cup\Sigma_\circ$ ناسازگار باشد و این یعنی π می‌فُرکد. $\square$

۹. فرض کنید $A\subseteq B\subseteq C$ و a عنصری در مدل هیولامان باشد. آنگاه داریم

$$a\underset{A}{\overset{d,f}{\downarrow}}C \Rightarrow a\underset{B}{\overset{d,f}{\downarrow}}C \text{ و } a\underset{A}{\overset{d,f}{\downarrow}}B$$

به بیان دیگر اگر $\mathrm{tp}(a/C)$ روی A نفرکد (بخش نشود) آنگاه این تایپ روی B نیز نمی‌فُرکد (بخش نمی‌شود)، بعلاوه $\mathrm{tp}(a/B)$ نیز روی A نمی‌فُرکد (بخش نمی‌شود).

۱۰. اگر $p(x)$ یک تایپِ Lstp_A–ناوردا باشد، روی A بخش (و معادلاً فرک) نمی‌کند.

۱۱. اگر $\pi(x)$ روی A بخش شود روی آن هم چنین می‌فُرکد.

۱۲. به نکته‌ی زیر درباره‌ی تعدیِ فُرکِش توجه کنید. نه همیشه این چنین است که اگر $p\subseteq q\subseteq r$ یکی یکی گسترش نافرک باشند آنگاه r گسترش نافرک p است. مثال نقض، تصویر زیر در دی‌الاُ است.

$$\begin{array}{l} r: -------------x\circ y----------- \\ q: -------------x\circ ----------- \\ p: -------------\circ ----------- \end{array} \qquad (۳)$$

که در این تصویر تایپِ $\circ$ روی مجموعه‌ی پارامتر نقطه‌چین مراد است که x و y نیز به پارامترها افزوده می شوند تا تایپ‌های بزرگ‌تر ساخته شوند.

۱۳. اگر تایپِ $\pi(x)$ ناسازگار باشد روی هر A بخش می‌شود.

۱۴. تایپِ $\pi(x)$ با مجموعه‌ی پارامترِ $\mathrm{acl}(A)$ روی A بخش نمی‌شود.

۱۵. تایپِ $\pi(x,a)$ روی A بخش می‌شود اگر و تنها اگر که دنباله‌ی A – بازنشناختنی‌ای چون $(a_i)_{i<\omega}$ باشد که با a آغاز شود و $\bigcup_i \pi(x,a_i)$ ناسازگار باشد.

۱۶.

$$\mathrm{acl}(A)=\{a: \text{بخش نشود } A \text{ روی } \mathrm{tp}(a/aA)\}=\{a: a\underset{A}{\overset{d}{\downarrow}}a\}.$$

۸ ثابت‌نشاندگی

منبع: صفحه‌ی ۳۰۶۸ از [۴].

فرض ها: $T=T^{eq}$ یک تئوری کامل و M یک مدلِ ناشمارای اشباع از آن است. p یک m–تایپ جزئی

روی تهی و P مجموعه‌ی برآورده‌گرانِ p در M بهمراهِ ساختار برگرفته از M روی آن است؛ یعنی زیرمجموعه‌های صفرتعریف شدنی P^n ردپاهای زیرمجموعه‌های صفرتعریف شدنیِ M^{mn} روی P^n اند.

P را ثابت‌نشانده [12] می‌خوانیم هرگاه برای هر n، اگر $D \subseteq M^{mn}$ تعریف شدنی باشد آنگاه $D \cap P^n$ با پارامترهای P تعریف شدنی باشد. شماره‌های زیر معادلند:

۱. برای هر a، $\operatorname{tp}(a/\operatorname{dcl}(a) \cap \operatorname{dcl}(P)) \vdash \operatorname{tp}(a/P)$

۲. برای هر a یک $P_0 \subseteq P$ ی کوچک (مثلا از اندازه‌ی کمتر از $2^{\aleph_0}$) هست که

$$\operatorname{tp}(a/P_0) \vdash \operatorname{tp}(a/P).$$

۳. برای هر a یک $P_1 \subseteq P$ ی کوچک هست که $\operatorname{tp}(a/\operatorname{acl}(P_1)) \vdash \operatorname{tp}(a/P)$

۴. برای هر a، $\operatorname{tp}(a/P)$ روی یک $P_0 \subseteq P$ (ی قابل شمارش) تعریف شدنی است.

۵. P ثابت نشانده است.

۶. هر اتومرفیسمِ P به یک اتومرفیسمِ مدل هیولا می گسترد.

۹ سادگی

منظور از $2^{<\omega}$ مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های متناهی از صفر و یک است. وقتی می گوئیم $(a_s, s \subseteq 2^{<\omega})$ یک درخت است یعنی عناصر آن به گونه‌ی زیر درخت شده اند:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & & & & & & \\ a_{000} & & a_{001} & & a_{010} & & a_{011} \\ & a_{00} & & & & a_{01} & \\ & & & a_{0} & & & \end{array} \tag{۴}$$

توجه کنید که تعداد گره‌های این درخت شمارا و تعداد شاخه‌های آن ناشماراست (اولی تعداد دنباله‌های متناهی از صفر و یک و دومی تعداد دنباله‌های نامتناهی از صفر و یک است.) منظور از $\omega^{<\omega}$ همه‌ی دنباله‌های متناهی از اعداد طبیعی است. وقتی می گوئیم $(a_s, s \subseteq \omega^{<\omega})$ درخت است یعنی:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & & & & & & & & \\ a_{00} & a_{01} & a_{02} & \ldots & a_{10} & a_{11} & a_{12}\ldots & & \\ & a_{0} & & & & a_{1} & & & a_{2}\ldots \end{array} \tag{۵}$$

فرمولِ $\phi(x,y)$ (نسبت به k) **ویژگیِ درختی** [13] دارد هرگاه درختی از پارامترهای $(a_s | \emptyset \neq s \in^{<\omega} \omega)$ باشد که

۱. در هر طبقه از درخت، عناصر هم ریشه ناسازگار باشند: یعنی برای هر $s \in^{<\omega} \omega$، $(\phi(x, a_{si}) : i < \omega)$، k–ناسازگار است.

۲. امتدادِ هر شاخه سازگار باشد: برای هر $\sigma \in^{<\omega} \omega$، مجموعه‌ی $\{\phi(x, a_s) | \emptyset \neq s \subseteq \sigma\}$ سازگار باشد.

[12] stably embedded
[13] tree property (with respect to k)

تئوری T **ساده**[۱۴] است، هرگاه در آن هیچ فرمولی با ویژگیِ درختی نباشد. روشن است که برای این پدیده کافی است فرمولهای بی پارامتر بررسی شوند.

تعریف ۲۲. بگذارید Δ یک مجموعه‌ی متناهی از فرمولهای بی پارامترِ $\phi(x,y)$ باشد. یک دنباله‌ی $(\Delta-k)$ بخشی (خوانده شود دلتا کِی بخشی) روی A دنباله‌ای چون $(\phi_i(x,a_i) : i<\delta)$ است که:

۱. $\phi_i(x,y)\in\Delta$.

۲. $\phi_i(x,a_i)$ روی $A\cup\{a_j : j<i\}$ نسبت به k بخش می‌شود.

۳. $\{\phi_i(x,a_i)|i<\delta\}$ سازگار است.

لم ۲۳. ۱. اگر ϕ نسبت به k ویژگیِ درختی داشته باشد، آنگاه برای هر A و μ، یک دنباله‌ی $(\phi-k)$–بخشی از طولِ μ روی A هست.

۲. اگر هیچ $\phi\in\Delta$ نسبت به k ویژگی درختی نداشته باشد، هیچ دنباله‌ی $\Delta-k$ بخشی ای روی تهی پیدا نمی‌شود.

اثبات. فقط اثباتِ ۱ را نوشته‌ایم. فرض می‌کنیم μ یک اردینالِ حدی باشد. با یک بحث فشردگی، می‌توان دانست که برای هر μ و k یک درختِ $(a_s|\emptyset\neq s\in^{<\mu}k)$ هست که همه‌ی خانواده‌های $(\phi(x,a_{si})|i<k)$ ناسازگار و برای همه‌ی $\sigma\in^{\mu}\kappa$، $\{\phi(a,a_s)\emptyset\neq s\subseteq\sigma\}$ سازگار باشند. برای k ی به اندازه بزرگ، بازگشتی[۱۵] [۱۶] می‌توان یک مسیر σ چنان ساخت که برای هر $s\in\sigma$، نامتناهی a_{si} تایپ یکسانی روی $A\cup\{a_t|t\leq s\}$ داشته باشند. حال $(\phi(x,a_{\sigma\upharpoonright i+1})|i<\mu)$ یک دنباله‌ی $\phi-k$ بخشی روی A است. $\square$

گزاره ۲۴. فرض کنید T کامل باشد. شماره‌های زیر معادل‌اند:

۱. T ساده است.

۲. (مشخصه‌ی موضعی) برای هر $p\in S_n(B)$ یک $A\subseteq B$ که $|A|\leq|T|$ هست که p رویش بخش نشود.

اثبات. اثباتِ ۱ به ۲. اگر ۲ برقرار نباشد، یک دنباله‌ی $(\phi_i(x,b_i) : i<|T|^+)$ از فرمولهای $p(x)$ هست که هر $\phi_i(x,b_i)$ نسبت به k_i روی $\{b_j|j<i\}$ بخش می‌شود. یک زیردنباله‌ی نامتناهی از این دنباله هست که در آن همه‌ی $\phi_i(x,b_i)$ ها برابر $\phi(x,b)$ و همه‌ی k_i ها برابرِ k هستند که این یک دنباله‌ی $(\phi-k)$ بخشی به دست می‌دهد. $\square$

نتیجه ۲۵. اگر T ساده باشد و $p\in S(A)$ آنگاه p روی A نمی فُرکد.

اثبات. فرض کنید p روی A بفُرکد، و از آن جا یک فصلِ $\bigvee_{l<d}\phi_l(x,b)$ از آن برآید که در آن هر یک از فرمولها بخش می‌شود. بگیرید $\Delta=\{\phi_l(x,y) : l<d\}$. با استقرا روی همه‌ی n ها نشان می دهیم که یک دنباله‌ی $\Delta-k$ بخشی به طول n روی A هست. این در حالی است که در تئوری های ساده طولِ دنباله‌های $\Delta-k$ بخشی کران دارد. اثباتِ ادامه دارد. $\square$

[۱۴] simple

[۱۵] recursively

[۱۶] عموماً می نویسند «به گونه‌ی بازگشتی» در حالی که در فارسی صفت و قید عموماً یکسانند و بازگشتی خودش معنی به گونه‌ی بازگشتی می‌دهد.

نتیجه ۲۶ (وجود). اگر T ساده باشد، هر تایپِ روی A دارای یک گسترشِ نافُرک به هر B ی شاملِ A است.

تعریف ۲۷. A از B روی C مستقل است، $A \downarrow_C B$، هرگاه برای هر چندتائیِ متناهیِ $\bar{a}$ از A، $\mathrm{tp}(\bar{a}/BC)$ روی C نفُرکد.

به یاد آرید که در تئوری‌های ω– ثابت، عبارتِ بالا یعنی $\mathrm{tp}(a/BC)$ و $\mathrm{tp}(a/C)$ مرتبه‌ی مُرلیِ برابر دارند و این به بیان نارسمی یعنی B در شناسائیِ A چندان به C کمک نمی‌کند.

تعریف ۲۸. بگذارید A یک ترتیبِ خطی باشد. دنباله‌ی $(a_i)_{i\in I}$ را

۱. مستقل روی A گوئیم هرگاه $a_i \downarrow_A \{a_j : j < i\}$ برای همه‌ی i ها.

۲. مُرلی روی A می‌نامیم هرگاه مستقل و بازنشناختنی روی A باشد.

۳. مُرلی در $p(x)$ روی A گوئیم هرگاه مُرلی روی A و ساخته شده از همه‌ی برآورنده‌های p باشد.

لم ۲۹. اگر $P \in S(B)$ روی A نفُرکد، یک دنباله‌ی مُرلیِ نامتناهی در p روی A هست که روی B بازنشناختنی است. به ویژه وقتی T ساده باشد، برای هر $p \in S(A)$ یک دنباله‌ی مُرلی نامتناهی در p روی A هست.

لم ۳۰. بگذارید T ساده و $\pi(x,y)$ یک تایپِ جزئی روی A باشد. بگذار $(b_i)_{i<\omega}$ یک دنباله‌ی مُرلیِ نامتناهی روی A و $\bigcup_{i<\omega}\pi(x,b_i)$ سازگار باشد. آنگاه $\pi(x,b_0)$ روی A بخش نمی‌شود.

گزاره ۳۱. بگذارید T ساده باشد. آنگاه $\pi(x,b)$ روی A بخش می‌شود اگر و تنها روی آن بفُرکد.

قضیه ۳۲ (استقلال). فرض کنید b و c تایپِ یکسان روی مدلِ M داشته باشند و

$$B \underset{M}{\downarrow} C, b \underset{M}{\downarrow} B, c \underset{M}{\downarrow} C$$

آنگاه d ای هست که $\mathrm{tp}(d/B) = \mathrm{tp}(b/B)$ و $\mathrm{tp}(d/C) = \mathrm{tp}(c/C)$ و

$$d \underset{M}{\downarrow} BC.$$

ملاحظه ۳۳. خاصیت تعدّی به گونه‌ی زیر است:

$$a \underset{A}{\downarrow} B, a \underset{AB}{\downarrow} C \Rightarrow a \underset{A}{\downarrow} BC.$$

۱۰ تایپهای قویِ لاسکار

تعریف ۳۴. بگذارید A یک مجموعه‌ی پارامتر باشد. گروهِ $\mathrm{Aut}_f(\mathbb{M}/A)$ از اتومرفیسم های قوی لاسکار از $\mathbb{M}$ روی A، گروه تولید شده با همه‌ی $\mathrm{Aut}(\mathbb{M}/A)$ ها است که M ها مدلهای شاملِ A هستند. دو چندتائیِ a و b تایپ قوی لاسکارِ یکسانی روی A دارند، هرگاه یک اتومرفیسمِ α در چنین گروهی، یکی را به دیگری برده باشد.

آسان می‌توان دید که a و b تایپ لاسکار یکسان روی A دارند هرگاه دنباله‌ای چون

$$a_0 = b_0, b_1, \dots, b_n = b$$

باشد که هر b_i و b_{i+1} روی یک مدلِ شاملِ A تایپ یکسانی داشته باشند.

تعریف ۳۵ (ریگْـبَر و همریگ). بگذارید p یک تایپ روی یک مدلِ M از T باشد و $q \in S(B)$ گسترشی از آن به $M \supseteq B$. آنگاه q را «وارثِ» یا «ریگبرِ» [۱۷] p می‌نامیم هرگاه برای هر $L(M)$–فرمولِ $\phi(x, y)$، اگر برای یک $b \in B$، $\phi(x, b)$ در q باشد، آنگاه یک $m \in M$ باشد که $\phi(x, m)$ در p بیافتد. اگر q در M متناهیاً برآورده شود، آن را «شریکِ ارث» یا «همریگ» [۱۸] p می‌نامیم. [۱۹]

در بخش‌های بعدی به «آرایه‌های بازنشناختنی» که گسترشی از مفهومِ دنباله‌های بازنشناختنیند می‌پردازیم.

۱۱ بازنشناختگی آرایه‌ها

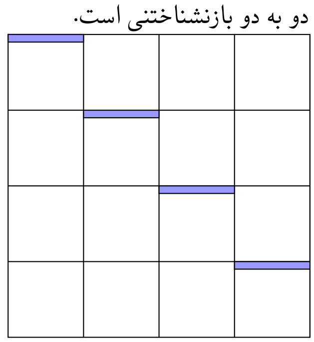
مطالب این بخش و بخش‌های آینده ترجمه‌ای از یادداشت‌های «کازانواز» [۲۰] است که یک ترم در فرایبورگ با ایشان و «زیگلر» درباره‌ی ان‌تی‌پی‌دو هفته‌ای چند جلسه داشتیم.

تعریف ۳۶. آرایه‌ی $(a_{ij} | i < \alpha, j < \beta)$ را **دو به دو بازنشناختنی** [۲۱] می‌خوانیم هرگاه دنباله‌ی سطرهای آن دوبه‌دوبازنشناختنی باشد؛ یعنی هر سطرِ $(a_{ij} | j < \beta)$ روی بقیه‌ی سطرهای $(a_{lj} | l < \alpha, l \neq i, j < \beta)$ بازنشناختنی باشد.

ملاحظه ۳۷. آرایه‌ی $(a_{ij} | i < \alpha, j < \beta)$ وقتی و تنها وقتی دو به دو بازنشناختنی است که برای هر انتخاب n سطرِ $i_1 < \dots < i_n < \alpha$ و برای هر سطر l از این میان، m ستونِ $j_1^l < \dots < j_m^l < \beta$ و $k_1^l < \dots < k_m^l < \beta$، داشته باشیم

$$(a_{l, j_r^l} | l \in \{i_1, \dots, i_n\}, 1 \leq r \leq m) \equiv (a_{l, k_r^l} | l \in \{i_1, \dots, i_n\}, 1 \leq r \leq m)$$

لم ۳۸. فرض کنید $\beta \geq \omega$. اگر در آرایه‌ی $(a_{ij} | i < \alpha, j < \beta)$ دنباله‌ی ستون ها بازنشناختنی باشد، آنگاه آرایه‌ی $(b_{ij} | i < \alpha, j < \beta.\alpha)$ که در آن $b_{ij} = a_{i, \beta.i+j}$، دو به دو بازنشناختنی است.



[۱۷] heir

[۱۸] coheir

[۱۹] از لغت نامه‌ی دهخدا. مرده ریگ . [م ُ دَ / دِ] (اِ مرکب) میراث . آنچه از مرده باز ماند. باز مانده . وامانده . تراث . ارثیه . ترکه . متروکات . مرده ری: گنج زری که چو خسبی زیر ریگ با تو باشد آن نماند مرده ریگ. مولوی

[۲۰] Enrique Casanovas

[۲۱] mutually indiscernible

در گزارهای پیش‌رو خواهیم دید که از دل یک آرایه‌ی به‌اندازه‌پهن (= با ستون‌های بسیار) می‌توان یک آرایه‌ی دوبه دو بازنشناختنی درکشید. پیش‌تر پس از لمِ اردوش ـ رادو وعده‌ی این را داده بودیم.

گزاره ۳۹. فرض کنید $\lambda = \beth^+_{2^\kappa}$ و $\kappa \geq |T| + |a_{ij}| + |\alpha|$. برای هر آرایه‌ی $(a_{ij}|i < \alpha, j < \beta.\lambda)$ یک آرایه‌ی دو به دو بازنشناختنیِ $(a'_{ij}|i < \alpha, j < \omega)$ هست که برای هر $m, n < \omega$ و هر انتخاب برای n سطرِ $i_1 < \ldots < i_n < \alpha$ و m ستونِ $j_1 < \ldots < j_m < \omega$ (در آرایه‌ی (a')) یک انتخاب متناظرِ $k^l_1, \ldots, k^l_m < \lambda$ از ستون ها (در آرایه‌ی اول) برای هر $l = i_1, \ldots, i_n$ باشد که

$$(a_{l,k^l_r}|1 \leq l \leq n, 1 \leq r \leq m) \equiv (a'_{l,j_r}|1 \leq l \leq n, 1 \leq r \leq m)$$

در ادامه، نسخه‌ی ساده‌تری از گزاره‌ی ۳۹ را بیان و اثبات می‌کنیم.

گزاره ۴۰. برای هر مجموعه‌ی کوچک C و هر کاردینالِ κ یک λ هست که: هرگاه $A = (a_{\alpha,i})_{\alpha<n,i<\lambda}$ آرایه‌ای باشد با $n < \omega$ و $|a_{\alpha,i}| < \kappa$، آن‌گاه یک آرایه‌ی $B = (b_{\alpha,i})_{\alpha<n,i<\omega}$ یافت می‌شود که سطرهای آن روی C بازنشناختنی‌اند و هر زیرآرایه‌ی متناهی از B، روی C تایپِ‌یکسانی با تایپِ یک زیرآرایه‌ی متناهی از A دارد.

اثبات. می‌گیریم $\lambda_0 = \kappa + |T| + |C|$ و $\lambda_{n+1} = \beth_{(2^{\lambda_n})}$ و $\lambda = \sum_{n<\omega} \lambda_n$. حال آرایه‌ی $A = (a_{\alpha,i})_{\alpha<n,i<\lambda}$ را در نظر می‌گیریم و می‌گذاریم: $\bar{a}_\alpha = (a_{\alpha,i})_{i<\lambda_\alpha}$. بنا به قضیه‌ی اردوش ـ رادو (نتیجه‌ی ۹) و انتخابِ λ_i ها، یک دنباله‌ی $\bar{a}'_{n-1} = (a'_{n-1,i})_{i<\omega}$ یافت می‌شود که روی $\bar{a}_{<n-1}$ بازنشناختنی است و هر زیردنباله‌ی متناهی از آن تایپِ یکسانی روی $\bar{a}_{<n-1}$ با تایپِ یک زیردنباله‌ی متناهی از $\bar{a}_{n-1}$ دارد. اکنون ازآنجاکه $|\bar{a}_{<n-2} \cup \bar{a}'_{n-1}| \leq \lambda_{n-3}$، بنا به اردوش ـ رادو می‌توان یک دنباله‌ی $\bar{a}'_{n-2} = (\bar{a}'_{n-2,i})_{i<\omega}$ را چُنان یافت که روی $\bar{a}_{<n-2}\bar{a}_{n-1}$ بازنشناختنی باشد و هر زیردنباله‌ی متناهی از آن دارای تایپِ یکسانی روی $\bar{a}_{<n-2}\bar{a}'_{n-1}$ با تایپِ یک زیردنباله از $\bar{a}_{n-2}$ باشد. به همین منوال می‌توان به دنباله‌های $\bar{a}'_{n-1}, \bar{a}'_{n-2}, \ldots, \bar{a}'_0$ رسید که آرایه‌ی مورد نظرِ ما را می‌سازند. □

گزاره ۴۱. برای هر آرایه‌ی $(a_{ij}|i < \alpha, j < \omega)$ یک آرایه‌ی دو به دو بازنشناختنیِ $(a'_{ij}|i < \alpha, j < \omega)$ هست که هرگاه $i_1 < \ldots < i_n < \alpha$ یک انتخاب از سطرها باشد و $j_1, \ldots < j_m < \omega$ یک انتخاب از ستون ها و $a' := (a'_{l,j_r}|l = i_1, \ldots, i_n; r = 1, \ldots, m)$ یک چندتائیِ آرایه‌ای باشد و $\phi(x) \in L$ یک فرمول باشد که $\models \phi(a')$، آنگاه برای هر سطرِ $l = i_1, \ldots, i_n$ یک چندتائیِ متناظرِ $k^l_1 < \ldots < k^l_m < \omega$ از ستونها یافت می‌شود که $\models \phi(a)$ که در آن $a = (a_{l,k^l_r}|l = i_1, \ldots, i_n; r = 1, \ldots, m)$.

گزاره ۴۲. فرض کنید C یک مجموعه‌ی کوچک از پارامترها باشد و $A = (a_{\alpha,i})_{\alpha<n,i<\omega}$ یک آرایه باشد که در آن $n < \omega$. برای هر مجموعه‌ی متناهیِ $\Delta \in L(C)$ و هر $N < \omega$، می‌توان n دنباله‌ی متناهیِ Δ ـ دوبه‌دوبازنشناختنیِ $(a_{\alpha,i_{\alpha,0}}, \ldots, a_{\alpha,i_{\alpha,N}} \subseteq \bar{a}_\alpha)$ را یافت (یعنی می‌توان از هر سطرِ A به‌گونه‌ای N عنصر برداشت که دنباله‌های حاصل، دوبه‌دوبازنشناختنی باشند).

تعریف ۴۳. آرایه‌ی $(a_{ij}|i < \alpha, j < \beta)$ را **تقریباً دو به دو بازنشناختنی** [۲۲] می‌خوانیم هر گاه هر سطرِ $(a_{ij}|j < \beta)$ از آن روی سطرهای پیشین $(a_{lj}|l < i, j < \beta)$ و ادامه‌ی ستون اول $(a_{l0} : i < l < \alpha)$ بازنشناختنی باشد.

[۲۲] almost mutually indiscernible

لم ۴۴. آرایه‌ی $(a_{ij}|i < \alpha, j < \beta)$ تقریباً دو به دو بازنشناختنی است اگر و تنها اگر برای هر $i < \alpha$، و هر دو چندتائیِ $j_\circ < \ldots < j_n < \beta$ و $l_\circ < \ldots < l_n < \beta$ و هر دو مسیر پایانیِ $f, g : \{k : i < k < \alpha\} \to \beta$، دنباله‌های $(a_{k,f(k)}|i < k < \alpha), a_{ij_\circ}, \ldots, a_{ij_n}$ و $(a_{k,g(k)}|i < k < \alpha), a_{il_\circ}, \ldots, a_{il_n}$ روی $(a_{lj} : l < i, j < \beta)$ تایپ یکسانی داشته باشند.

لم ۴۵. برای هر آرایه‌ی تقریباً دو به دو بازنشناختنیِ $(a_{ij}|i < \alpha, j < \beta)$ که $\beta \geq \omega$، یک آرایه‌ی دو به دو بازنشناختنیِ $(a'_{ij}|i < \alpha, j < \beta)$ هست که برای هر $i < \alpha$،

$$(a_{ij}|j < \beta) \equiv_{(a_{l_\circ}|i \leq l < \alpha)} (a'_{ij}|j < \beta)$$

تعریف ۴۶. آرایه‌ی $(a_{ij}|i < \alpha, j < \beta)$ را A–بازنشناختنی [۲۳] می‌خوانیم هرگاه هم دنباله‌ی ستون ها و هم دنباله‌ی سطرهایش A–بازنشناختنی باشد. آن را **بسیار A–بازنشناختنی** [۲۴] می‌خوانیم هرگاه A–بازنشناختنی و در همان حال، دو به دو بازنشناختنی روی A باشد.

ملاحظه ۴۷. آرایه‌ی $(a_{ij}|i < \alpha, j < \beta)$، A–بازنشناختنی است اگر و تنها اگر برای هر $m, n < \omega$ و $i_۱ < \ldots < i_n < \alpha$ و $l_۱ < \ldots, l_n < \alpha$ و برای هر $j_۱ < \ldots < j_m < \beta$ و $k_۱ < \ldots < k_m < \beta$:

$$(a_{i_r j_s}|r = ۱, \ldots, n; s = ۱, \ldots, m) \equiv_A (a_{l_r k_s}|r = ۱, \ldots, n; s = ۱, \ldots, m)$$

ملاحظه ۴۸. دنباله‌ی ستونهای یک آرایه‌ی دوبه دو بازنشناختنی، بازنشناختنی است. از این رو یک آرایه، بسیار بازنشناختنی است اگر و تنها اگر دو به دو بازنشناختنی باشد و دنباله‌ی سطرهای آن بازنشناختنی باشد.

۱۲ بار و دی پی مرتبه

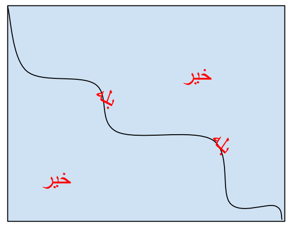
تعریف ۴۹. یک **اینـْپْ اُلگو** [۲۵] از اندازه‌ی (κ, α) (کاپا کاردینال است و آلفا اوردینال و گاهی نیز از مجموعه‌های مرتبِ خطّیِ دیگری چون $\mathbb{Z}$ بهره می گیریم) برای یک تایپ جزئیِ $p(x)$ روی $\emptyset$ از اقلام زیر پدید می آید:

- آرایه‌ای از پارامترهای $(a_{ij}, i < \kappa, j < \alpha)$ که در آن هر a_{ij} یک چند تائی (ی شاید نامتناهی)است.
- دنباله‌ای از فرمولهای $(\phi_i(x, y_i) : i < \kappa)$ (که از آن جا که می‌شود پارامترها را به (a_{ij}) افزود فرض گرفته‌ایم $(\phi_i(x, y_i) \in L$).
- یک دنباله از اعداد طبیعی $(k_i)_{i<\kappa}$،

آنگونه که

- همه‌ی مسیرها با $p(x)$ سازگارند؛ یعنی برای هر $f : \kappa \to \alpha$ مجموعه‌ی $\{\phi_i(x, a_{i,f(i)}) : i < \kappa\} \cup p(x)$ سازگار است.
- هر سطرِ i اُم k_i–ناسازگار است؛ یعنی در هر $i < \kappa$ دنباله‌ی $(\phi_i(x, y_i)|i < k)$، k_i–ناسازگار است.

[۲۳] A-indiscernible
[۲۴] strongly A-indiscernible
[۲۵] inp pattern



شکل ۱: آنچه در یک آی‌سی‌تی‌الگو رخ می‌دهد

می گوئیم $(a_{ij} : j < \kappa, k < \alpha)$ یک اینْپْ آرایه است و برای آسانی اینپ آرایه را سر هم خواهیم نوشت: «اینپارایه». [۲۶]

تعریف ۵۰. یک **آی سی تی اُلگو** [۲۷] از اندازه‌ی (κ, α) (کاپا و آلفا همانندِ تعریف پیشین) برای یک تایپ جزئیِ $p(x)$ روی تهی، از اقلام زیر بدست می آید.

- آرایه‌ای از پارامترهای $(a_{ij} | i < \kappa, j < \alpha)$،
- دنباله‌ی $(\phi_i(x, y_i) : i < \kappa)$ (دوباره فرض کرده‌ایم که فرمولها در L اند) از فرمولها که در هر مسیر $f : \kappa \to \alpha$ مجموعه‌ی زیر از فرمولها سازگار است

$$p(x) \cup \{\phi_i(x, a_{i,f(i)}) \wedge \neg\phi_i(x, a_{i,j}) | j \neq f(i), j < \alpha, i < \kappa\}.$$

می گوئیم $(a_{ij} | i < \kappa, j < \alpha)$ یک **آی سی تی آرایه** است.

تعریف ۵۱. **بار**، یا **بِرْدِن** [۲۸] یک تایپ جزئیِ $p(x)$ که با $\mathrm{bdn}(p)$ نمایانده می‌شود، کوچک ترین کاردینالِ کاپائی است که برای آن هیچ اینپالگوئی از سایز (κ, ω) نباشد. **دی پی مرتبه‌ی**[۲۹] p کوچک ترین کاردینالی چون κ است که هیچ آی سی تی الگوئی از اندازه‌ی (κ, ω) برای p نباشد. این تعریف ها با آن‌ها که معمولاً در نوشتار می آید هم خوان نیست. عموماً سوپرمم کاردینالهائی را می گیرند که برایشان چنین الگوهائی **باشند**.

ملاحظه ۵۲.

۱. هیچ اینپ اگلوئی از سایز (κ, α) نیست اگر و تنها اگر $\mathrm{bdn}(p) \leq \kappa$. همین برای آی‌سی‌پی الگوها و دی پی مرتبه هم برقرار است.

۲. اگر $\mathrm{bdn}(p) > |T|^+$ آنگاه $\mathrm{bdn}(p) = \infty$. همین برای دی پی مرتبه هم برقرار است.

[۲۶] inp-array
[۲۷] ict-pattern
[۲۸] burden
[۲۹] dp-rank

۱۳ اِن آی پی و اِن تی پی دو

تعریف ۵۳. تایپ جزئیِ $p(x)$ **آی پی دارد** [۳۰] هر گاه فرمولی چون $\phi(x,y) \in L$ و برای آن پارامترهائی چون $(a_i|i<\omega)$ و $(b_J|J\subseteq\omega)$ باشند که هر a_i این تایپ را بر می آورد و $\models \phi(a_i,b_J)^{i\in J}$. [۳۱] اگر $p(x)$ آی پی نداشته باشد می گوئیم **از نوعِ اِن آی پی** است. [۳۲]

بیان دیگر این است که وقتی فرمولی آی پی دارد، دنباله‌ای پیدا می‌شود که همه‌ی زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ را با کمک این فرمول بشناساند.

ملاحظه ۵۴.

- $p(x)$ آی پی دارد اگر و تنها اگر برای یک فرمول $\phi(x,y)$ و برای یک $b \models p$ یک دنباله بازنشناختنی $(a_i|i<\omega)$ باشد که $\models \phi(b,a_i)^{i \text{ زوج}}$.
- در عبارت بالا می‌توان نقش x و y را عوض کرد. یعنی می‌توان به جای $b \models p(x)$ گفت $a_i \models p(y)$. با تعریف آی پی نیز می‌توان همین گونه کرد: به جای $a_i \models p(x)$ بگوئیم $b_J \models p(y)$.

تعریف ۵۵. **بُعدِ «واپنیک چِرنُوِینِنْکیس»** [۳۳] یا **بُعدِ وی‌سی** برای یک فرمولِ $\phi(\bar{x},\bar{y})$ به گونه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{vc}(\phi(\bar{x},\bar{y})) = \max\{n<\omega | \exists(\bar{a}_i)_{i<n}\exists(\bar{b}_J)_{J\subseteq n} \quad (\models \phi(\bar{a}_i,\bar{b}_J) \Leftrightarrow i\in J)\}.$$

اگر $\phi(\bar{x},\bar{y})$ یک فرمول باشد، برعکسِ آن، یعنی $\phi^{\text{برعکس}}(\bar{x},\bar{y})$ بنا به تعریف همان فرمول است که در آن جای متغیرها عوض شده باشد. هم‌چنینِ بعدِ وی‌سیِ دوگانِ ϕ که آن را با $\mathrm{vc}^*(\phi)$ نشان می‌دهند بنا به تعریف، بُعد وی‌سیِ $\phi^{\text{برعکس}}$ است؛ یعنی

$$\mathrm{vc}^*(\phi) = \mathrm{vc}(\phi(\bar{x},\bar{y})) = \max\{n<\omega | \exists(\bar{a}_I)_{I\subseteq n}\exists(\bar{b}_j)_{j<n} \quad (\models \phi(\bar{a}_I,\bar{b}_j) \Leftrightarrow j\in I)\}.$$

بنا بر این گفته یک فرمولِ $\phi(\bar{x},\bar{y})$ در صورتی عدمِ استقلال (اِن‌آی‌پی) دارد که

$$\mathrm{vc}^*(\phi) = \infty.$$

تعریف ۵۶. **عددِ تناوبِ** [۳۴] یک فرمولِ $\phi(\bar{x},\bar{y})$ به گونه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}&\mathrm{alt}(\phi(\bar{x},\bar{y})) := \max\{n<\omega | \exists(\bar{a}_i)_{i<\omega} (\text{ دنباله‌ی بازنشناختنی }) \\ &\exists \bar{b} \quad \forall i < n-۱ \quad (\models \phi(\bar{a}_i,\bar{b}) \leftrightarrow \neg\phi(\bar{a}_{i+۱},\bar{b}))\}\end{aligned}$$

گزاره ۵۷. همواره داریم

$$\mathrm{alt}(\phi) \leq ۲\,\mathrm{vc}(\phi) + ۱.$$

گزاره ۵۸. شماره‌های زیر با هم معادلند:

---

[۳۰] has IP, has the independence property

[۳۱] این نمادگذاری ابتکارِ «شِلاخْ» است. معنی این عبارت این است که $\models \phi(a_i,b_J)$ اگر و تنها اگر $i\in J$.

[۳۲] is/has NIP–not the independence property

[۳۳] Vapnik-Chervonenkis dimention

[۳۴] alternation number

۱. ϕ خاصیت عدمِ استقلال ندارد (ان‌آی‌پی ندارد، وابسته است).

۲. $\phi^{\text{برعکس}}$ خاصیت عدمِ استقلال ندارد.

۳. $\mathrm{vc}(\phi) < \infty$.

۴. $\mathrm{alt}(\phi) < \infty$

۵. برای هر دنباله‌ی بازنشناختنیِ $(\bar{a}_i)_{i<\omega}$ و هر چندتائیِ $\bar{b}$، مجموعه‌ی زیر از پانویس‌ها، یا خودش متناهی است و یا متممِ آن متناهی است:

$$\{i < \omega | \models \phi(\bar{a}_i, \bar{b})\}.$$

تعریف ۵۹. می‌گوئیم فرمولِ $\phi(x,y)$ تی پی دو دارد [۳۵] هرگاه یک آرایه‌ی $A = (a_{ij})_{i,j<\omega}$ و یک عدد متناهی k باشند که

۱. $\phi(x, A$ سطرِ iاُم $)$، k–ناسازگار باشد.

۲. $\{\phi(x, a_{if(i)})\}_{i\in\omega}$ سازگار باشد (هر مسیرِ غیر سطری اندرونِ ϕ سازگار است). یک تئوری را **اِن‌تی‌پی‌دو** [۳۶] می‌نامیم هرگاه هیچ فرمولی از آن تی پی دو نداشته باشد.

خوش‌دانسته است که اگر T اِن‌تی‌پی‌دو داشته باشد، فرمولی چون $\phi(x,y)$ با $|x| = ۱$ شاهد آن است.

لم ۶۰. $\phi(x,y)$ اِن‌تی‌پی‌دو دارد هرگاه یک آرایه‌ی بسیار بازنشناختنیِ $A = (a_{ij})_{i,j\in\omega}$ یافت شود که

۱. A شاهدِ اِن‌تی‌پی‌دو است.

۲. یک c هست که

$$c \models \phi(x, A \text{ سطرِ اول })$$

و دنباله‌ی $\bar{a}_i$ از سطرهای A روی c بازنشناختنی است.

گزاره ۶۱.

۱. $\mathrm{bdn}(p) \leq \mathrm{dprk}(p)$.

۲. اگر $p(x)$ آی پی داشته باشد، $\mathrm{dprk}(p) = \infty$

۳. اگر $p(x)$ اِن آی پی باشد، $\mathrm{bdn}(p) = \mathrm{dprk}(p) < \infty$.

اثبات. ۱. نشان می دهیم که هر اینپارایه‌ی دو به دو بازنشناختنیِ (a_{ij}) برای p یک آی سی تی آرایه برای آن است. بگذارید k عمقِ (تعداد سطرهای) آن باشد. فرض می‌کنیم مجموعه‌ی اندیسِ سطرها $\mathbb{Z}$ است. بگذارید b همزمان $p(x)$ و ستونِ صفر $\{\phi_i(x, a_{i\circ})|i<k\}$ را برآورد. برای اطمینان از این‌که برای همه‌ی $j \neq ۰$، $\neg\phi_i(b, a_{ij})$ از هر سطرِ i ام $\leq k_i$ عنصر پاک می‌کنیم. اکنون

$$p(x) \cup \{\phi_i(x, a_{i\circ}) \wedge \neg\phi_i(x, a_{ij}) | \circ \neq j \in \mathbb{Z}, i < \kappa\}$$

[۳۵] has TP2
[۳۶] $\mathrm{NTP}_۲$

سازگار است. بنا به دو به دو بازنشناختگی و انتخاب $\mathbb{Z}$ برای مجموعه‌ی اندیس، همه‌ی مسیرهای دیگر هم همین ویژگی سازگاری را دارند.

۲. بگذارید $\phi(x,y)$ گواهِ این باشد که p با پارامترهای $(a_{ij}|i<\kappa, j<\omega)$ و $(b_J : J\subseteq k\times\omega)$ آی پی دارد که هر a_i در این جا p را بر می آورد. آنگاه $(a_{ij}|i<\kappa, j<\omega)$ با $\phi(x,y)=\phi(x,y)$ یک آی سی تی الگو برای $p(x)$ است.

۳. فرض کنید p اِن آی پی است. نخست نشان می دهیم که $\mathrm{bdn}(p)\geq \mathrm{dprk}(p)$. بگذارید $(a_{ij}|i<\kappa, j<\omega)$ به همراه فرمولهای $(\phi_i(x,y_i) : i<\kappa)$ یک آی سی تی الگو برای p باشد. فرض می‌کنیم که هر سطر، بازنشناختنی است. بگذارید $\psi_i(x,y_۱,y_۲)=\phi_i(x,y_۱)\wedge\neg\phi_i(x,y_۲)$ و بگیرید $b_{ij}=a_{i,۲j}a_{i,۲j+۱}$. از آن جا که $p(x)$ ان آی پی است، برای هر $i<\kappa$ مجموعه‌ی $p(x)\cup\{\psi_i(x,b_{ij})|j<\omega\}$ ناسازگار است. می‌توانیم برای هر i یک فرمول $\theta_i(x)\in p$ و یک عدد k_i بیابیم که $p(x)\cup\{\theta_i(x)\wedge\psi_i(x,b_{ij})|j<\omega\}$، k_i ناسازگار باشد. آرایه‌ی (b_{ij}) با فرمولهای $\cup\{\theta_i(x)\wedge\psi_i(x,b_{ij})|j<\omega\}$ و اعداد k_i برای $p(x)$ اینپ الگو هستند.

سرانجام، فرض کنید $\mathrm{dprk}(p)=\infty$. می‌خواهیم نشان دهیم که $p(x)$ آی پی دارد. در این جا یک آی‌سی‌پی الگو از اندازه‌ی (ω,ω) با آرایه‌ی (a_{ij}) و فرمول یکسانِ $\phi(x,y)$ داریم. برای یک $J\subseteq\omega$ ی داده شده (مثلاً مجموعه‌ی اعدادِ زوج)، تابع $f:\omega\to\omega$ را چنان که $f(i)=۰$ اگر و تنها اگر $i\in J$ بگیرید. آنگاه

$$p(x)\cup\{\phi(x,a_{i۰}) : i\in J\}\cup\{\neg\phi(x,a_{i۰})|i\in\omega-J\}$$

سازگار است. بنابراین نخستین ستونِ $(a_{i۰}|i<\omega)$ و $\phi(x,y)$ آی پی بودن $p(x)$ را گواهند. $\square$

گزاره ۶۲. برای κ و $p(x)$ معادلند:

۱. $\mathrm{dprk}(p)\leq\kappa$

۲. برای هر آرایه‌ی دو به دو بازنشناختنیِ $(a_{ij}|i<\kappa, j<\omega)$ و هر $b\models p$ یک $i<k$ هست که همه‌ی a_{ij} ها تایپ یکسان روی b دارند.

۳. برای هر آرایه‌ی دوبه دو بازنشناختنیِ $(a_{ij}|i<\kappa, j<\omega)$ و هر $b\models p$ یک $i<\kappa$ هست که $(a_{ij}|j<\omega)$، b - بازنشناختنی است.

اثبات. ۲ به ۱. از فرض بر می آید که هیچ آی سی تی الگوئی از اندازه‌ی (κ,ω) نداریم؛ وگرنه در آرایه‌ی (بازنشناختنیِ) متناظر، ستون اول را با همراه یک

$$b\models p(x)\cup\{\phi_i(x,a_{i۰})\wedge\neg\phi(x,a_{ij})|i<\kappa, ۰\neq j<\omega\}$$

بر می داشتیم که برای همه‌ی $i<\kappa$ داشته باشیم $a_{i۰}\not\equiv a_{i۱}$.

۱ به ۲. فرض کنید که $b\models p$ و (a_{ij}) ناقضِ ۲ باشند. برای هر $i<\kappa$ اندیس های k,l و یک فرمول $\phi_i(x,y_i)$ را چنان توان یافت که $\models\phi_i(b,a_{il})\wedge\neg\phi_i(b,a_{ik})$. پس از آن که برخی (a_{ij}) ها را از این سطر پاک کردیم، یک اندیس l و چهار حالت می ماند: حالت نخست این که a_{il} برآورنده‌ی $\phi_i(b,y)$ باشد ولی بقیه‌ی چند تائی های این سطر نقیض آن را بر آورند. حالت دوم این که a_{il} فرمول $\neg\phi_i(b,y)$ را برآورد ولی بقیه‌ی چندتائی ها دراین سطر خودِ این فرمول را. حالت سوم این که a_{il} و همه‌ی پیشانش در این سطر فرمول $\phi_i(b,y)$ را بر آورند و همه‌ی پسانش در این سطر نقیض این فرمول را. سرانجام حالت چهارم این که a_{il} و همه‌ی پیشانش در این سطر فرمول $\neg\phi_i(b,y)$ را بر می آورند و همه‌ی پسانش در این سطر خود این

فرمول را. فرض می‌گیریم که $l = ۰$. در هر کدام از حالت های بالا فرمولهای ψ_i و درایه‌های جدید b_{ij} را به گونه‌ی زیر تعریف می‌کنیم.

$$
\begin{array}{lcr}
\neg\phi_i \leftarrow \phi \rightarrow \neg\phi & \psi_i(x,y) = \phi_i(x,y) & b_{ij} = a_{ij} \\
\phi_i \leftarrow \neg\phi_i \rightarrow \phi & \psi_i(x,y) = \neg\phi_i(x,y) & b_{ij} = a_{ij} \\
\phi_i \leftarrow \phi_i \rightarrow \neg\phi_i & \psi_i(x,y_۱y_۲) = \phi_i(x,y_۱) \wedge \neg\phi_i(x,y_۲) & b_{ij} = a_{i,۲j}a_{i,۲j+۱} \\
\neg\phi \leftarrow \neg\phi \rightarrow \phi_i & \psi_i(x,y_۱y_۲) = \neg\phi_i(x,y_۱) \wedge \phi_i(x,y_۲) & b_{ij} = a_{i,۲j}a_{i,۲j+۱}
\end{array}
$$

پس از این که هر سطر را به گونه‌ی مشابهی، پیراستیم و ستون های نامنفی را گرفتیم، به یک آی سی تی الگو از اندازه‌ی (κ,ω) برای $p(x)$ می رسیم که این ناقض یک است.

۲ به ۳. بگذارید (a_{ij}) و $b \models p$ مثال نقضی برای ۳ باشند. در سطرِ $i < k$ اندیس های

$$j_۰ < \ldots < j_{n-۱} < l_۰ < \ldots < l_{n-۱}$$

را چنان برگزینید که

$$a_{ij_۰}\ldots, a_{ij_{n-۱}} \not\equiv a_{il_۰}\ldots a_{il_{n-۱}}.$$

بی کاستن از کلیت بگیرید $j_k = k$ و $l_k = n+k$. بگذارید

$$b_۰ = a_{۱,۰}\ldots a_{i,n-۱}$$

و

$$b_۱ = a_{i,n}\ldots, a_{i,۲n-۱}$$

و باقی نیز به همین ترتیب. آنگاه همه‌ی b_i ها تایپ های متفاوت روی b دارند. اگر به همین ترتیب همه‌ی سطرها را بپیرائیم به مثال نقضی برای دو می رسیم. □

لم ۶۳. برای یک دنباله‌ی بازنشناختنیِ $(a_i|i<\omega)$ و یک چند تائیِ b معادلند:

۱. یک $(a'_j|j<\omega) \equiv_{a_۰} (a_j|j<\omega)$ هست که b–بازنشناختنی است.

۲. یک $(a'_j|j<\omega) \equiv_{a_۰} (a_j|j<\omega)$ هست که در آن a'_j ها تایپ یکسانی روی b دارند.

۳. $\bigcup_{j<\omega} q(x,a_j)$ که در آن $q(x,y) = \mathrm{tp}(b,a_۰)$ سازگار است.

همچنین $\mathrm{tp}(b/a_۰)$ روی تهی بخش نمی‌شود اگر و تنها اگر که هر دنباله‌ی بازنشناختنیِ $(a_i|i<\omega)$ یکی از شرط های بالا را برآورد.

اثبات. ۲ به ۳. b تایپِ $\bigcup_{j<\omega} q(x,a'_j)$ را بر می آورد، و سازگاریِ $\bigcup_{j<\omega} q(x,a'_j)$، سازگاریِ $\bigcup_{j<\omega} q(x,a_j)$ را پشتوانه است.

۳ به ۱. فرض کنید b' یک برآورنده از $\bigcup_{j<\omega} q(x,a_j)$ باشد. با کمکِ لمِ استاندارد برای بازنشناختنی ها، یک دنباله‌ی b'–بازنشناختنیِ $(a'_j|j<\omega)$ به دست آرید که موضعاً روی b' مانندِ $(a_j|j<\omega)$ است (یعنی هر فرمولِ روی b' که با یک چندتائیِ صعودی از (a'_i) ها برآورده شود، با یک چندتائیِ صعودی از (a_i) ها برآورده شود). از آن جا که $\mathrm{tp}(b',a'_۰) = \mathrm{tp}(b,a_۰)$، می‌توانیم فرض کنیم که $b'a'_۰ = ba_۰$. بنا بر بازنشناختنگی، $(a'_j|j<\omega) \equiv_{a_۰} (a_j|j<\omega)$. □

گزاره ۶۴. برای تایپِ جزئیِ p و هر کاردینالِ κ، شماره‌های زیر معادلند:

۱. $\mathrm{bdn}(p) \leq \kappa$

۲. برای هر $b \models p$ و هر آرایه‌ی دو به دو بازنشناختنیِ $(a_{ij}|i<\kappa, j<\omega)$ یک $i<\kappa$ و یک دنباله‌ی b–بازنشناختنیِ $(a'_j|j<\omega)$ هستند که $(a_{ij}|j<\omega) \equiv_{a_{i\circ}} (a'_j|j<\omega)$.

۳. برای هر $b \models p$ و هر آرایه‌ی دو به دو بازنشناختنیِ $(a_{ij}|i<\kappa, j<\omega)$ یک $i<\kappa$ و یک دنباله‌ی $(a_{ij}|j<\omega) \equiv_{a_{i\circ}} (a'_j|j<\omega)$ هستند که a'_j ها همه تایپ یکسانی روی b دارند.

۴. برای هر $b \models p(x)$ و هر آرایه‌ی دو به دو بازنشناختنیِ $(a_{ij}|i<\kappa, j<\omega)$ یک $i<\kappa$ هست که $\bigcup_{j<\omega} q_i(x, a_{ij})$ سازگار است؛ آن جا که $q_i(x, y_i) = \mathrm{tp}(b, a_{a_{i\circ}})$.

هم ارزی ۲ و ۳و ۴ از لم ۶۳ می آید.
۱ به ۴. بگذارید $q_i(x,y_i) = \mathrm{tp}(b, a_{i\circ})$. اگر همه‌ی $\bigcup_{j<\omega} q_i(x,a_{ij})$ ها ناسازگار باشند، می‌توانیم در هر حالت یک $\phi_i(x,y_i) \in q_i(x,y_i)$ و $k_i < \omega$ برداریم که $\{\phi_i(x,a_{ij} : j<\omega)\}$، k_i ناسازگار باشد.
از آن جا که $b \models p(x) \cup \{\phi_i(x,a_{i\circ}) : i<\kappa\}$، بنا به دو به دو بازنشناختنگی، همه‌ی مسیرها با $p(x)$ سازگارند. این یک اینپ الگو از سایزِ (κ,ω) برای $p(x)$ به دست می‌دهد، ناقضِ ۱.
۴ به ۱. اگر $\kappa < \mathrm{bdn}(p)$، یک اینپارایه‌ی $(a_{ij}|i<\kappa, j<\omega)$ با فرمولهای $\phi(x,y_i)$ و اعداد k_i برای p هستند. بگذارید $b \models p(x) \cup \{\phi_i(x,a_{i\circ}) : i<\kappa\}$. یک $i<\kappa$ را بنا به ۴ برای b بردارید. آنگاه برای همه‌ی $j<\omega$ داریم $\phi_i(x,a_{ij}) \in q_i(a, a_{a_{ij}})$؛ اما k_i – ناسازگاری سطرها موجب ناسازگاریِ $\bigcup_{j<\omega} q_i(x,a_{ij})$ می‌شود.

۱۴ زیر جمعی و زیر ضربی بودن

لم ۶۵. بگذارید $\mathbb{A} = (a_{ij} : i \leq \kappa+\lambda, j<\omega)$ دو به دو بازنشناختنی باشد. بگذارید $I = (a_{k+\lambda,j}|j<\omega)$ و فرض کنید $\mathbb{A}_{<k} = (a_{ij} : i<\kappa, j<\omega)$ روی Ia دو به دو متمایز است. آنگاه برای هر چند تائیِ متناهیِ $b \subseteq \mathbb{A}_{<k}$ یک b $b' \equiv_{aI}$ هست که $\mathbb{A}$ روی b' دو به دو بازنشناختنی است.

اثبات. آرایه را به آرایه‌ای به عرضِ $\omega+\omega$ با همان ویژگی‌های دو به دو بازنشناختگی گسترش دهید. b' را از بخشِ اضافه شده‌ی $\{a_{ij}|\omega \leq j < \omega+\omega\}$ به گونه‌ای بردارید که همان توزیع سطریِ b را داشته باشد. بنا به دو به دو بازنشناختگی روی aI داریم $b' \equiv_{aI} b$. این را که $\mathbb{A}$ روی b' بازنشناختنی است به آسانی تحقیق می‌توان کرد.

□

گزاره ۶۶. فرض کنید $\mathrm{dprk}(a) \leq \kappa < \omega$ و $(a_{ij}|i<\kappa+n, j<\omega)$ دو به دو بازنشناختنی باشد. آنگاه برای یک $X \subseteq k+n$ با $|X| = n+۱$، آرایه‌ی $(a_{ij}|i \in X, j<\omega)$ روی a دو به دو بازنشناختنی است.

اثبات. استقراء روی n. بنا به گزاره‌ی ۶۲ حکم برای $n=\circ$ روشن است. فرض کنید حکم برای n درست باشد. می‌خواهیم آن را برای $n+۱$ بیازمائیم. فرض کنید نشود زیرمجموعه‌ی Xِ مورد نظرِ از سایزِ $n+۲$ را برای آرایه‌ی دو به دو بازنشناختنیِ $\mathbb{A} = (a_{ij}|i<\kappa+n+۱, j<\omega)$ پیدا کرد. بگیرید $I_i = (a_{ij}|j<\omega)$. برای $l = ۱, \ldots, k+n$ چند تائی های $b'_\circ, \ldots, b'_l$ را باستقراء چنان می‌سازیم که $\mathbb{A}$ روی $b'_\circ, \ldots, b'_l$ دو به دو بازنشناختنی باشد و هیچ I_l ای روی $ab'_\circ, \ldots, b'_l$ نا تمیز نباشد. فرض کنید $b'_\circ, \ldots, b'_{l-۱}$ ساخته

شده اند. سطرِ I_l را که پاک کنیم، آرایه‌ای با عمقِ $\kappa+n$ به دست می آید که روی $I_l b'_0,\ldots,b'_{l-1}$ دو به دو بازنشناختنی است. بنا به فرضِ استقراء یکِ زیرمجموعه‌ی $X_l \subseteq k+n+1-\{l\}$ با اندازه‌ی $n+1$ هست که $I_{X_l}=(a_{ij}|i\in X_l, j<\omega)$ روی $I_l ab'_0,\ldots,b'_{l-1}$ دو به دو بازنشناختنی است. اگر I_l روی $I_{X_l ab'_0,\ldots,b'_{l-1}}$ نا تمیز باشد، می‌توان این سطر را به X_l افزود و از آن یک آرایه‌ی دو به دو بازنشناختنیِ $I_l+I_{X_l}$ روی $ab'_0,\ldots,b'_{l-1}$ با $n+2$ سطر به دست آورد که فرضمان را نقض می کند. اگر I_l روی $I_{X_l ab'_0,\ldots,b'_{l-1}}$ بازنشناختنی نباشد، آن برای یک چندتائیِ b_l که از I_{X_l} آمده باشد، این آرایه روی $b_l ab'_0,\ldots,b'_{l-1}$ نا تمیز نیست. بنا به لمِ ۶۵ و فرضِ استقراء، یکِ b_l $b'_l \equiv_{aI_l b'_0,\ldots,b'_{l-1}}$ در $\mathbb{A}$ هست که روی $b'_0,\ldots,b'_{l-1}b'_l$ دو به دو بازنشناختنی است. بنا به انتخابِ b'_l، I_l روی $ab'_0,\ldots,b'_l$ نا تمیز نیست. بنابراین این ساز و کار ادامه می یابد و در پایان $\mathbb{A}$ روی $b'_0,\ldots,b'_{k+n}$ نا تمیز خواهد بود ولی هیچ I_l روی $ab'_0,\ldots,b'_{k+n}$ نا تمیز نخواهد بود. این، گزاره‌ی ۶۲ را نقض می کند. □

نتیجه ۶۷ (زیرجمعی بودن). هرگاه $\mathrm{dprk}(a)$ و $\mathrm{dprk}(b/a)$ متناهی باشند،

$$\mathrm{dprk}(ab)\le \mathrm{dprk}(a)+\mathrm{dprk}(b/a)-1.$$

اثبات. بگذارید $k=\mathrm{dprk}(a)$ و $n=\mathrm{dprk}(b/a)$. گزاره‌ی ۶۲ را به کار می گیریم که نشان دهیم $\mathrm{dprk}(ab)\le k+n-1$. بگذارید $(a_{ij}|i<k+n-1, j<\omega)$ دو به دو بازنشناختنی باشد. بنا به گزاره‌ی ۶۶ یک $X\subseteq k+n-1$ از اندازه‌ی n هست که $(a_{ij}|i\in X, j<\omega)$ روی a بازنشناختنی است. حال از آن جا که $\mathrm{dprk}(a/b)\le n$، بنا به گزاره‌ی ۶۴ یک $i\in X$ هست که سطرِ I_i روی ab بازنشناختنی است و این همان است که می‌خواهیم.

□

بحث در حالتِ نامتناهی آسان تر است:

لم ۶۸. بگذارید $\kappa\ge\omega$ و فرض کنید $\mathrm{dprk}(a)\le\kappa$ و $(a_{ij}|i<\kappa, j<\omega)$ دو به دو بازنشناختنی باشد. آنگاه برای یک $X\subseteq\kappa$ با اندازه‌ی κ، $(a_{ij}|i\in X, j<\omega)$ روی a دو به دو بازنشناختنی است.

اثبات. از آن جا که $\kappa.\kappa=\kappa$ می‌توانیم آرایه را به گونه‌ی $(a_{(\alpha,\beta),j}|\alpha,\beta<\kappa, j<\omega)$ باز آرائیم. برای سطرها از نمادگذاریِ $I_{\alpha,\beta}=(a_{(\alpha,\beta),j}|j<\omega)$ استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\alpha<\kappa$. مشاهده کنید که آرایه‌ی $(a_{(\alpha,\beta),j}|\beta<\kappa, j<\omega)$ روی بقیه‌ی سطرهای $(I_{\gamma,\beta}|\gamma\neq\alpha,\beta<\kappa)$ دو به دو متمایز است و لذا بنا بر گزاره‌ی ۶۲ یک اوردینالِ $\beta_\alpha<\kappa$ هست که که برایش سطرهای I_{α,β_α} روی $a(I_{\gamma,\beta}|\gamma\neq\alpha,\beta<\kappa)$ بازنشناختنی است. از این نتیجه می‌شود که آرایه‌ی $(a_{(\alpha,\beta_\alpha),j}|\alpha<\kappa, j<\omega)$ روی a دو به دو بازنشناختنی است. □

گزاره ۶۹. اگر یکی از مرتبه‌های $\mathrm{dprk}(a)$ یا $\mathrm{dprk}(b/a)$ نامتناهی باشد، آنگاه

$$\mathrm{dprk}(ab)\le \mathrm{dprk}(a)+\mathrm{dprk}(b/a).$$

گزاره ۷۰ (زیر ضربی بودن).[۳۷] $\mathrm{bdn}(ab)\le \mathrm{bdn}(a).\,\mathrm{bdn}(b/a)$.

اثبات. بگذارید $k=\mathrm{bdn}(a)$ و $\lambda=\mathrm{bdn}(b/a)$. می‌خواهیم با کمک گزاره‌ی ۶۴ ثابت کنیم که $\mathrm{bdn}(ab)\le\kappa.\lambda$. یک آرایه‌ی دو به دو بازنشناختنی با عمقِ $\kappa.\lambda$ را در نظر می گیریم. برای مجموعه‌ی اندیس راحت تر است که $\kappa\times\lambda$ را با ترتیبِ عکسِ قاموسی بگیریم. آنگاه آرایه مان

[۳۷] submultiplicity

$(a_{(\alpha,\beta),j}|\alpha < \kappa, \beta < \lambda, j < \omega)$ است. برای سطرها نماد گذاریِ $I_{\alpha\beta} = (a_{(\alpha,\beta),j}|j < \omega)$ را به کار می بندیم. می‌خواهیم یک $(\alpha, \beta) \in \kappa \times \lambda$ و یک دنباله‌ی ab–بازنشناختنی $(a_{(\alpha,\beta),j}|j < \omega) \equiv_{a_{(\alpha,\beta),0}} (a_j|j < \omega)$ بیابیم. باستقراء برای هر $\beta < \lambda$ یک اوردینالِ $\alpha_\beta < \kappa$ و یک سطرِ $I'_\beta = (a'_j|j < \omega)$ را چنان بر می گزینیم که

۱. $I_{\alpha_\beta,\beta} \equiv_{a_{(\alpha_\beta,\beta),0} I'_{<\beta} I_{\geq(0,\beta+1)}} I'_\beta$.

۲. I'_β روی $aI'_{<\beta}I_{\geq(0,\beta+1)}$ نا تمیز است.

۳. آرایه‌ی سطرهای $I_{<\beta} + I_{\geq(0,\beta)}$ دو به دو بازنشناختنی است.

حال نشان می دهیم که چگونه می‌توان a_β و I'_β را به دست آورد. بنا به ۳ آرایه‌ی $(a_{(\alpha,\beta),j}|\alpha < \kappa, j < \omega)$ روی $I'_{<\beta}I_{\geq(0,\beta+1)}$ دو به دو بازنشناختنی است. گزاره‌ی ۶۴ یک $\alpha_\beta < \kappa$ و یک سطرِ I'_β به دست می‌دهد که ویژگی های ۱و ۲ را داراست. باید وارَسید که آرایه‌ی سطرهای $I'_{<\beta} + I_{\geq(0,\beta+1)}$ دو به دو بازنشناختنی است. این از ۳ می آید زیرا که $I'_{<\beta} + I_{\geq(0,\beta+1)} \equiv I'_{\leq\beta} + I_{\alpha_\beta,\alpha} + I_{\geq(0,\beta+1)}$.

این ساز و کار که پایان یابد، یک آرایه با سطرهای $(I'_\beta|\beta < \lambda)$ به دست آورده‌ایم. توجه کنید که بنا به ۱ $a'_{\beta,0} = a_{(\alpha_\beta),0}$ و از ۲ بر می آید که آرایه‌ی تازه روی a تقریباً دو به دو بازنشناختنی است. اکنون بنا به گزاره‌ی ۶۴ یک $\beta < \lambda$ و یک دنباله‌ی ab –بازنشناختنیِ $I'_\beta \equiv_{aa'_{\beta,0}} (a''_j|j < \omega)$ یافت می‌شود. توجه کنید که $I_{\alpha_\beta,\beta} \equiv_{a_{(\alpha_\beta,\beta),0}} (a''_j|j < \omega)$.

$\square$

۱۵ وزن و بار

لم ۷۱. فرض کنید T ساده [۳۸] باشد. اگر $(a_i|i < \kappa)$ یک دنباله‌ی مستقل بدان گونه باشد که

$$a \not\downarrow a_i$$

برای همه‌ی $i < k$، آنگاه یک اینپارایه‌ی $(a_{ij}|i < \kappa, j < \omega)$ برای $p(x) = \mathrm{tp}(a)$ هست که برای هر $i < \kappa$، $a_{i0} = a_i$.

اثبات. به استقراء دنباله‌ی مُرلیِ $I_i = (a_{ij}|j < \omega)$ را در $\mathrm{tp}(a_i/a_{>i}I_{<i})$ به گونه‌ای می‌سازیم که $I_i \downarrow a_{>i}I_{<i}$ و $a_{i0} = a_i$. فرض کنید I_j برای همه‌ی $j < i$ ساخته شده باشد. اگر $j < i$ آنگاه با فرضِ استقراء $I_j \downarrow a_{>j}I_{<j}$ و از این رو، $I_{\leq j} \downarrow a_{>j}$. از این نتیجه می‌شود که $I_{<i} \downarrow a_{\geq i}$. آنگاه (بنا به فرض) $a_i \downarrow a_{<i}$ و $a_i \downarrow_{a<i} I_{<i}$ و از این رو $a_i \downarrow a_{<i}I_{<i}$. بنابرین، در $\mathrm{tp}(a_i/a_{<i}I_{<i})$ یک دنباله‌ی مُرلیِ $I_i = (a_{ij}|j < \omega)$ هست که با $a_{i0} = a_i$ آغاز شده است. نتیجه می‌شود که $I_i \downarrow a_{<i}I_{<i}$ و بنابرین I_i در $\mathrm{tp}(a_i)$ مُرلی است. از آن جا که $a_i \not\downarrow a$ فرمولی چون $\phi_i(x, y)$ هست که $\models \phi_i(a, a_i)$ و $\phi_i(x, a_i)$ روی تهی بخش می‌شود. از آن جا که $(a_{ij}|j < \omega)$ در $\mathrm{tp}(a_i)$ مُرلی است، برای یک $k_i < \omega$، مجموعه فرمولِ $\{\phi_i(x, a_{ij})\}$، k_i ناسازگار است. توجه داشته باشید که a برآورنده‌ی $p(x) \cup \{\phi_i(x, a_{i0})|i < \kappa\}$ است. از آن جا که هر I_i روی $I_{<ia_{>i}}$ بازنشناختنی است، آرایه، تقریباً دو به دو بازنشناختنی است. پس برای هر مسیرِ $f : k \to \omega$ مجموعه فرمولِ $p(x) \cup \{\phi_i(x, a_{i,f(i)})|i < \kappa\}$ سازگار است. در این روند، یک اینپارایه برای $p(x)$ ساخته‌ایم. $\square$

[۳۸] simple

لم ۷۲. فرض کنید T ساده باشد. بگذارید $(a_{ij}|i < \kappa, j < \omega)$ یک اینپارایه‌ی دو به دو بازنشناختنی برای $p(x) \in S(\emptyset)$ باشد. آنگاه برای یک مجموعه‌ی C، برای همه‌ی $i < k$، برای یک $a \models p$، $I = (a_{i0}|i < \kappa)$ دنباله‌ای C–مستقل است و $a \downarrow_I C$ و $a \not\downarrow_C a_{i0}$.

تعریف ۷۳. پیش وزنِ a که با $pwt(a)$ نشانش می دهیم، نخستین کاردینالِ κ ای است که برایش هیچ دنباله‌ی مستقلِ $(a_i : i < \kappa)$ نباشد که همه‌ی عناصرش از a (روی تهی) مستقل باشند. وزنِ a که با $wt(a)$ نشانش می دهیم، نخستین کاردینالِ κ است که هیچ مجموعه‌ی C و دنباله‌ی C–مستقلی چون $(a_i|i < \kappa)$ نباشد که $a \downarrow C$ و برای هر $i < \kappa$، $a \not\downarrow_C a_i$.

گزاره ۷۴. بگذارید T ساده باشد. برای هر a بارِ a سوپرممِ پیش وزنِ a روی C برای همه‌ی C ها و سوپرممِ وزنِ a روی C برای همه‌ی C هاست.

۱۶ ناوردائیِ اکید و لاسکار ناوردائی

در ادامه رابطه‌های سه تائیِ $\downarrow$ (لنگرِ) گوناگونی را در نظر می گیریم که می‌خواهیم ویژگی های زیر را داشته باشند.

۰. (ناوردائی) اگر $a \downarrow_C b$ آنگاه $f(a) \downarrow_{f(C)} f(b)$، برای هر اتومُرفیسمِ f.

۲. (یکنوائی) اگر $aa' \downarrow_C bb'$ آنگاه $a \downarrow_C b$.

۳. (یکنوائي پایه از راست) اگر $a \downarrow_C bb'$ آنگاه $a \downarrow_{Cb} b'$.

۴. (تعدی از چپ) اگر $a \downarrow_C d$ و $b \downarrow_{Ca} d$ آنگاه $ab \downarrow_C d$.

۵. (نُرمالگی از چپ) اگر $a \downarrow_C b$ آنگاه $aC \downarrow_C b$.

۶. (مشخصه‌ی متناهی قوی) اگر $a \not\downarrow_C b$ آنگاه برای فرمولی چون $\phi(x) \in \mathrm{tp}(a/Cb)$، برای همه‌ی a' های برآورنده‌ی این فرمول، $a' \not\downarrow_C b$.

گفتنی است که مشخصه‌ی قویِ متناهی، مشخصه‌ی متناهی را می‌دهد. چرا که اگر $a \not\downarrow_C b$ آنگاه برای یک $a' \subseteq a$ و $b' \subseteq b$ هردو متناهی، خواهیم داشت $a' \downarrow_C b'$. اگر $\downarrow$ ویژگی های بالا را داشته باشد می گوئیم یک «پیش استقلال [۳۹] » است. می‌شود هنوز چند اصل زیر را نیز افزود:

۱. تقارن: اگر $a \downarrow_C b$ آنگاه $b \downarrow_C a$.

۲. وجود: $a \downarrow_C c$

۳. گسترش: اگر $a \downarrow_C b$ آنگاه برای هر d یک $a' \equiv_{Cb} a$ هست که $a' \downarrow_C bd$.

تعریف ۷۵. تایپِ جهانیِ $p(x)$ را روی A، «لاسکارْ ناوَرْدا [۴۰] » می‌نامیم هرگاه برای هر اتومرفیسمِ قویِ $f \in \mathrm{Aut}_f(\mathbb{M}/A)$ داشته باشیم $p^f = p$. برای تایپ های جهانی، این معادل با «لاسکار نَشکافتن روی» A است: اگر $a \equiv^{Ls}_A b$ و $\phi(x,y) \in L(A)$ و $\phi(x,a) \in p(x)$ آنگاه $\phi(x,b) \in p(x)$.

---
[۳۹] preindependence
[۴۰] Lascar invarient over A

چند «لنگرِ» مفید:

۱. (متناهیاً برآوردگی) $a \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^u_C b$ اگر و تنها اگر $\mathrm{tp}(a/Cb)$ متناهیاً در C برآورده شود.

۲. (لاسکار ناوردائی) $a \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^i_C b$ اگر $\mathrm{tp}(a/Cb)$ را بشود به یک تایپِ جهانیِ لاسکار C ناوردا گستراند.

۳. (فُرکش) $a \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^f_C b$ هر گاه $\mathrm{tp}(a/bC)$ روی C نفُرکد.

۴. (بخش شدن) $a \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^d_C b$ هرگاه $\mathrm{tp}(a/bC)$ روی C بخش نشود.

ملاحظه ۷۶. $a \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^u_C b$ اگر و تنها اگر برای یک دنباله‌ی $(a_i : i \in I)$ از چندتائی های در C، برای یک فرافیلترِ U روی I، داشته باشیم: $\mathrm{tp}(a/Cb) = \lim_U \mathrm{tp}((a_i : i \in I)/Cb)$

ملاحظه ۷۷. اگر T ساده باشد، آنگاه $\mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^i = \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^d = \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^f$ و روی هر مدلِ M داریم $\mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^f_M = \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^u_M$. اگر T ساده باشد، $\mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^d = \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^f$. اگر T نیپ باشد $\mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^i = \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^f$. اگر T اِن‌تی‌پی‌دو باشد، روی هر مدلِ M داریم: $\mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^d_M = \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^f_M$. هم چنین همواره:

$$\mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^u \Rightarrow \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^i \Rightarrow \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^f \Rightarrow \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^d$$

مثال ۷۸. تئوریِ گراف های تصادفی (که ساده است و آیی دار) مثالی برای شماره‌های زیر است.

۱. $\mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^i_M \neq \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^f_M$

۲. $\mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^i_M \neq \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^u_M$.

اثباتِ ۱. بگیرید $b = b_1 b_2$ و فرض کنید M یک مدل باشد و $a \notin M b_1 b_2$. هم چنین فرض کنید که $R(a, b_1)$ و $\neg R(a, b_2)$. آنگاه $a \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^f_M b$ ولی $a \not\mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^i_M b$. □

اثباتِ ۲. بگذارید M یک مدل باشد و $b \notin M$ و برای همه‌ی $m \in M$ داشته باشیم $\neg R(b, m)$. عنصرِ $a \notin Mb$ را آن گونه که $R(a, b)$ و $\neg R(m, b)$ برای m های در M، بگیرید. آنگاه $a \not\mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^u_M b$. برای آزمودن درستیِ $a \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^i_M b$ ، تایپِ $p(x) \supseteq \mathrm{tp}(a/Mb)$ را که با فرمولهای $R(x, c)$ برای همه‌ی c های در $\mathbb{M} - M$، به همراه فرمولهای $x \neq m \wedge \neg R(x, m)$ برای همه‌ی m های در M تعریف شده است را در نظر بگیرید. توجه کنید که این تایپ M –ناوردا است. □

ملاحظه ۷۹. اگر I یک دنباله‌ی C بازنشناختنی باشد و $a \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^i_C I$ آنگاه I افزون بر این، Ca بازنشناختنی نیز است.

تعریف ۸۰. ۱. تایپِ جهانیِ $\mathrm{p}(x)$ روی C اکیداً بی تغییر است هرگاه روی C لاسکار ناوردا باشد و برای همه‌ی $B \supseteq C$ و هر $a \models \mathrm{p} \restriction B$ داشته باشیم $B \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^f_C a$.

۲. $a \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^{ist}_C b$ هرگاه $\mathrm{tp}(a/Cb)$ گسترشِ جهانی ای داشته باشد که اکیداً روی C بی تغییر است.

لم ۸۱ (شلاخ). فرض کنید $a_i \mathop{\perp\!\!\!\!\perp}^{ist} a_{<i}$ برای همه‌ی i های کمتر از α، و بگذارید $(a_{ij} | j < \omega)$ دنباله‌های بازنشناختنی ای باشند که در آنها $a_{i0} = a_i$. آنگاه آرایه‌ی دو به دو بازنشناختنیِ $(a'_{ij} | i < n, j < \omega)$ ای هست که برای هر $i < \alpha$ داشته باشیم $(a_{ij} | j < \omega) \equiv_{a_i} (a'_{ij} | j < \omega)$.

اثبات. فرض می‌کنیم $\alpha = n < \omega$ و با استقراء روی n پیش می رویم. فرض کنید باستقراء که آرایه‌ی دو به دو بازنشناختنیِ $I_{<n} = (a'_{ij}|i < n, j < \omega)$ را به دست آورده باشیم. از آن جا که $a_n \downarrow^{ist} a_{<n}$، می‌توان فرض کرد که $a_n \downarrow^{ist} I_{<n}$ و از این رو $I_{<n} \downarrow^{d} a_n$. یکی از مشخصه‌های استقلال بخش کردنی، می گوید که دنباله‌ای چون $I_n = (a'_{nj}|j < \omega) \equiv_{a_n} (a_{nj}|j < \omega)$ هست که روی $I_{<n}$ بازنشناختنی است. اکنون ادعا می‌کنیم که سطرهای آرایه‌ی $I_{\leq n}$ دو به دو بازنشناختنی اند. اثبات ادامه دارد... □

تعریف ۸۲. بگذارید $\alpha \geq \omega$ و فرض کنید برای هر $i < \alpha$، $a_i \models p$ برای یک p ی ثابت در $S(A)$. گوئیم دنباله‌ی $I = (a_i|i < \alpha)$ یک «شاهد» روی A است، هرگاه برای هر $a \models p$ برای هر $\phi(x, y) \in L(A)$: اگر $\phi(x, a)$ روی A بخش شود، آنگاه برای یک $k < \omega$، $\{\phi(x, a_i)\}$، k–ناسازگار است. توجه کنید که k تنها به ϕ و I بسته است.

گزاره ۸۳. با فرضِ اِن تی پی دو، هر دنباله‌ی نامتناهیِ $\downarrow^{ist}$ مستقل، یک شاهد است.

اثبات. فرض های زیر را بدارید: $p(x) = \text{tp}(a_i)$، $I = (a_i|i < \alpha)$، $\alpha \geq \omega$، $a_i \downarrow^{ist} a_{<i}$، $a \models p$، $\phi(x, y) \in L$، $\phi(x, a)$ روی $\emptyset$ نسبت به $k < \omega$ بخش می‌شود. بگذارید $(a_{\circ j}|j < \omega)$ با $a_{\circ} = a_{\circ\circ}$ یک دنباله‌ی بازنشناختنیِ شاهد بخش شدنِ $\phi(x, a)$ نسبت به k باشد. بگیرید $(a_{ij}|j < \omega) \equiv (a_{\circ j}|j < \omega)$ با $a_i = a_{i\circ}$. بنا به لمِ ۸۱ می‌توان فرض کرد که $(a_{ij} : i < \alpha, j < \omega)$ دو به دو بازنشناختنی است. برای هر $i < \alpha$، $\{\phi(x, a_{ij}) : j < \omega\}$، k–ناسازگار است. اگر برای هر $k' < \omega$، $\{\phi(x, a_i) : i < \alpha\}$ زیر مجموعه‌ی سازگاری از اندازه‌ی k' داشته باشد، آنگاه زیر مجموعه به اندازه‌ی دلخواه بزرگ X از α پیدا می‌شود که $(a_{ij}|i \in X, j < \omega)$ یک اینپارایه نسبت به k و $\phi(x, y)$ است. بنا به فشردگی، T تی پی دو دارد. □

۱۷ شاهد و پایه‌ی گسترش

برای فُرکش C را پایه‌ی گسترش [۴۱] می نامند هر گاه هیچ تایپِ در $S(C)$ روی C نفرکد. معادلاً هرگاه هر تایپِ روی C یک گسترشِ جهانیِ نافرک روی C داشته باشد.

تعریف ۸۴. می گوئیم A یک «پایه‌ی گسترش» برای $\downarrow^{ist}$ است هرگاه هر تایپِ روی A یک گسترشِ جهانیِ اکیداً بی تغییر داشته باشد. پایه ی گسترش را به همین سان برای $\downarrow^{i}$ و $\downarrow^{f}$ تعریف می کنند. به ویژه که A یک پایه‌ی گسترش برای $\downarrow^{f}$ است هرگاه هیچ تایپی روی A بر آن نفُرکد.

گزاره ۸۵. اِن‌تی‌پی‌دو را فرض بگیرید و هم چنین فرض کنید A یک پایه‌ی گسترش برای $\downarrow^{i}$ باشد و $\phi(x, y) \in L(A)$ و $\phi(x, a)$ روی A بخش شود. آنگاه یک دنباله‌ی $\downarrow^{i}$ مستقل که اعضایش همه برآورنده‌ی $\text{tp}(a/A)$ باشند پیدا می‌شود که شاهدِ بخش شدنِ $\phi(x, a)$ روی A باشد.

لم ۸۶. با فرضِ اِن‌تی‌پی‌دو، اگر A یک پایه‌ی گسترش برای $\downarrow^{ist}$ باشد، آنگاه هر فرمول روی A می فُرکد اگر و تنها اگر بخش شود.

اثبات. فرض کنید $\phi(x, b) \vdash \phi_i(x, a_i) \vee \ldots \vee \phi_n(x, a_n)$ بدان سان که هر ϕ_i روی A بخش شود. بگیرید $\bar{a} = ba_1 \ldots a_n$. یک گسترشِ جهانیِ p از $p = \text{tp}(a/A)$ را برگزینید که روی A اکیداً بی تغییر است و دنباله‌ی $(\bar{a}_j)$ از برآورنده‌های p را چنان بسازید که $\bar{a}_j \models \text{p} \upharpoonright A\bar{a}_{<j}$. بنویسید $\bar{a}_j = b^j a^j_i \ldots a^j_n$ و توجه کنید که $a^j_i \downarrow^{ist}_A a^{<j}_i$. بنا به گزاره‌ای، $(a^j_i|j < \omega)$ یک شاهد روی A است. کوتاه ادامه دارد. □

[۴۱] extension base

گزاره ۸۷ (جارو برقی). [۴۲] اِن‌تی‌پی‌دو را فرض بگیرید. بگذارید A یک پایه‌ی گسترش برای $\mathop{\smile\hspace{-0.8em}|}^{i}$ باشد. و $\pi(x)$ یک تایپِ جزئیِ لاسکار ناوردا روی A باشد (یعنی آن گونه که برای هر $f \in \mathrm{Aut}_f(\mathbb{M}/A)$، $\pi^f(x) = \pi(x)$) فرض کنید $\psi(x,y), \phi_i(x,y) \in L$. اگر $\phi(x) \vdash \psi(x,b) \vee \bigvee_{i<n} \phi_i(x,c)$ و $b \mathop{\smile\hspace{-0.8em}|}^{i}_{A} c$ و همه‌ی $\phi_i(x,c)$ ها روی A بخش شوند، آنگاه $\pi \vdash \psi(x,b)$.

اثبات. به استقرا روی n. فرض کنید $\pi(x) \vdash \psi(x,b) \vee \bigvee_{i\leq n} \phi_i(x,c)$ و $b \mathop{\smile\hspace{-0.8em}|}^{i}_{A} c$ و هر $\phi_i(x,c)$ روی A بخش شود. بنا به گزاره‌ی ۸۵ و ملاحظه‌ی پس از آن، یک دنباله‌ی $\mathop{\smile\hspace{-0.8em}|}^{i}$ مُرلی روی A مثلاً $(c_i : i < \omega)$ را در نظر بگیرید (این یعنی این دنباله A بازنشناختنی و $\mathop{\smile\hspace{-0.8em}|}^{i}$ مستقل روی A است) که شاهدِ بخش شدنِ $\phi_n(x,c)$ روی A باشد و در آن $c = c_{۰}$. بنا به ویژگیِ گسترشِ $\mathop{\smile\hspace{-0.8em}|}^{i}$ می‌توان فرض کرد که $b \mathop{\smile\hspace{-0.8em}|}^{i}_{A} (c_i : i < \omega)$. بنا به ملاحظه‌ی ۷۹ $(c_i : i \in \omega)$ دنباله‌ای Ab بازنشناختنی است. حال از آن جا که $c_j \equiv^{ls}_{Ab} c$ و $\pi(x)$ روی A لاسکار ناوردا است، برا ی همه‌ی m های $\omega >$ داریم

$$\pi(x) \vdash \psi(x,b) \vee \bigwedge_{j<m} \bigvee_{i\leq n} \phi_i(x,c_j)$$

یک $k < \omega$ را چنان بگیرید که $\{\phi_n(x,c_i) : i < \omega\}$ مجموعه‌ای k ناسازگار باشد. آنگاه

$$\pi(x) \vdash \psi(x,b) \vee \bigvee_{i<n} \phi_i(x,c_{k-۱}) \vee \ldots \vee \bigvee_{i<n} \phi_i(x,c_{۰}).$$

حال از این که $b \mathop{\smile\hspace{-0.8em}|}^{i}_{A} c_{\geq j}$ برمی آید که $b \mathop{\smile\hspace{-0.8em}|}^{i}_{c_{>j}} c_j$. از تعدی چپِ $\mathop{\smile\hspace{-0.8em}|}^{i}$ می آید که $c_{>j} \mathop{\smile\hspace{-0.8em}|}^{i}_{A} c_j$ و از ان نتیجه می گیریم که $bc_{>j} \mathop{\smile\hspace{-0.8em}|}^{i}_{A} c_j$. با k بار پشت سر هم فرض استقرا به کار گرفتن به $\pi(x) \vdash \psi(x,b)$ می رسیم. □

نتیجه ۸۸. اِن‌تی‌پی‌دو را فرض کنید و بگذارید A یک پایه‌ی گسترش برای $\mathop{\smile\hspace{-0.8em}|}^{i}$ باشد. اگر $\pi(x)$ یک تایپِ جزئیِ (و از این رو سازگار) لاسکار ناوردا روی A باشد، روی آن نمی‌فُرکد.

اثبات. گزاره‌ی ۸۷ را با $\psi = \perp$ به کار گیرید. □

گزاره ۸۹. با فرض اِن‌تی‌پی‌دو، هر پایه‌ی گسترش برای $\mathop{\smile\hspace{-0.8em}|}^{i}$ برای $\mathop{\smile\hspace{-0.8em}|}^{ist}$ نیز پایه‌ی گسترش است.

اثبات. فرض کنید A یک پایه‌ی گسترش برای $\mathop{\smile\hspace{-0.8em}|}^{i}$ باشد و بگیرید $p(x) = \mathrm{tp}(a/A)$. قرار است تایپ زیر سازگار باشد:

$$\begin{aligned} &p(x) \cup \{\psi(x,c) \leftrightarrow \psi(x,c) : \psi(x,z) \in L(A), c, c \in \mathbb{M}, c \equiv^{ls}_{A} c\} \\ &\cup \{\neg\phi(x,b) : \phi(x,b) : \phi(x,y) \in L(A), b \in \mathbb{M}, \text{ می‌فُرکد } A \text{ روی } \phi(a,y)\}. \end{aligned} \tag{۶}$$

اگر تایپ بالا ناسازگار باشد، آنگاه برای یک $\phi(x,y) \in L(A)$ ، یک $b \in \mathbb{M}$ و چند $\psi_i(x,z_i) \in L(A)$ و $c_i \equiv^{ls}_{A} c_i$، $\phi(a,y)$ روی A می‌فُرکد و

$$p(x) \vdash \phi(x,b) \vee \bigvee_{i<n} \neg\psi_i(x,c_i) \leftrightarrow \psi(x,c_i).$$

[۴۲] علت این نامگذاری این است که این گزاره، گزاره‌ی مشابهی با نام «لمِ جارو» را گسترش می‌دهد.

بگیرید $\pi(y) = \{\phi(a,y) : a \in \mathbb{M}, a \equiv^{ls}_A a\}$. آنگاه $\pi(y)$ روی A می‌فُرکد و بر آن لاسکار ناوردا است. پس بنا به نتیجه‌ی ۸۸ ناسازگار است. عناصرِ $(a_i : i < m)$ را چنان که $a_i \equiv^{ls}_A a$ و $\{\phi(a_i,y) : i < m\}$ ناسازگار باشد بگیرید. از آن جا که A پایه‌ی گسترشی برای $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^i$ است می‌توان تایپ جهانیِ $\mathrm{p}(x_0,\ldots,x_{m-1}) \supseteq \mathrm{tp}(a_0,\ldots,a_{m-1}/A)$ لاسکار ناوردا روی A را گرفت. هشدارید که هر تحدیدِ $\mathrm{p} \restriction x_j$ نیز روی A لاسکار ناوردا است و

$$\mathrm{p} \restriction x_j \supseteq p(x_j) \vdash \phi(x_j,b) \vee \bigvee_{i<n} \neg\psi(x_j,c_j) \leftrightarrow \psi_i(x_j,c_j).$$

پس $\mathrm{p} \restriction x_j \vdash \phi(x_j,b)$ و از این رو

$$\mathrm{p} \vdash \phi(x_0,b) \wedge \ldots \wedge \phi(x_{m-1},b).$$

از این برمی آید که $\{\phi(a_i,y) : i < m\}$ سازگار باشد؛ و این گونه نیست. $\square$

نتیجه ۹۰. در یک تئوریِ اِن‌تی‌پی‌دو، اگر A پایه‌ی گسترشی برای $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^i$ باشد، آنگاه هر فرمولی، روی A بخش می‌شود اگر و تنها اگر روی آن بفرکد.

اثبات. از گزاره‌های ۸۶ و ۸۹ به دست می آید. $\square$

لم ۹۱. فرض کنید $\phi(x,y) \in L$ و $A \subseteq B$. اگر $\phi(x,a)$ روی A بفرکد و $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A a$، آنگاه این فرمول روی B هم می‌فُرکد.

اثبات. فرض کنید $\phi(x,a) \vdash \phi_1(x,a_1) \vee \ldots \vee \phi_n(x,a_n)$ که هر $\phi(x,a_i)$ روی A بخش می‌شود. بنا به ویژگی گسترش برای $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^f = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}$ یک $B' \equiv_{Aa} B$ که $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A aa_1\ldots,a_n$. پیدا می‌شود. از آن جا که $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^d_A B'$، هر $\phi_i(x,a_i)$ روی B' بخش و از این رو $\phi(x,a)$ روی B' و روی B می‌فُرکد. $\square$

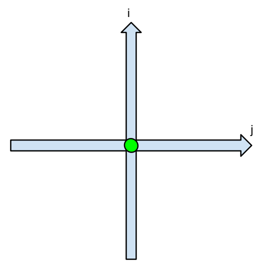
نتیجه ۹۲. یک فرمول در یک تئوریِ اِن‌تی‌پی‌دو، روی یک پایه‌ی گسترشِ A می‌فُرکد اگر و تنها اگر روی آن بخش شود.

۱۸ کِشسانی

تئوریِ T را «کِشسا» می‌خوانیم هرگاه در یکی از شرایطِ معادلِ گزاره‌ی زیر صدق کند.

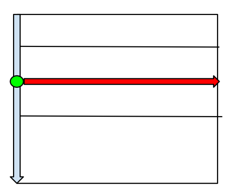
گزاره ۹۳. معادلند:

۱. هیچ دو دنباله‌ی $I = (a_i | i \in \mathbb{Z})$ و $J = (b_i | i \in \mathbb{Z})$ و فرمولِ $\phi(x,y) \in L$ ای یافت **نشود** که $\phi(x,I)$ سازگار و $\phi(x,J)$ ناسازگار باشند و I بازنشناختنی و J روی $I_{\neq 0}$ بازنشناختنی باشند و $a_0 = b_0$.



۲. اگر $I = (a_i | i \in \mathbb{Z})$ بازنشناختنی باشد، $\phi(x,y) \in L$ و $\phi(x,a_\circ)$ روی $I_{\neq \circ}$ بخش نشود، آنگاه $\phi(x,I)$ **ناسازگار** است.

۳. هیچ آرایه‌ی $(a_{ij}|i,j<\omega)$، عددِ $k<\omega$، و فرمولِ $\phi(x,y)\in L$ ای نیستند که برای هر $i<\omega$، همه‌ی عناصرِ سطرِ $J_i = (a_{ij}|j<\omega)$ روی ستونِ $I_\circ - \{a_{i\circ}\}$ (که $I_\circ = (a_{l\circ}|l<\omega)$) تایپِ یکسان داشته باشند، هر $\phi(x,J_i)$، k- ناسازگار باشد، و $\phi(x,I_\circ)$ سازگار باشد.



۴. کاردینالی چون κ باشد که برایش هیچ b و $I=(a_i|i<\kappa)$ ای (که b و a_i چندتائی های متناهیند) نباشند که برای هر $i<k$، $b \not\perp^{d}_{a_{\neq i}} a_i$.

لم دلتا و دلتا سامانه در نظریه‌ی مجموعه برای اثبات این قضیه به یک لم نظریه‌ی مجموعه‌ای نیاز داریم. یک دلتاسامانه، بنا به تعریف، گردایه‌ای از مجموعه‌هائی با اشتراکِ دو به دوی برابر است. لمِ دلتا می گوید که هر گردایه‌ی نامتناهی از مجموعه‌های متناهی، در برگیرنده‌ی یک دلتاـ سامانه‌ی نامتناهی است.

اثبات. ۱ به ۳. آرایه‌ی خواسته، با پیش راندنِ سطرِ J در امتدادِ ستونِ I به دست می آید. ۳ به ۱. می‌توان فرض کرد که هر سطرِ J_i روی ستونِ متناظرِ $I_\circ - \{a_{i\circ}\}$ بازنشناختنی است و می‌توان اندیس ها را به $\mathbb{Z}$ تغییر داد.

۳ به ۴. بگیرید $k = |T|^+$ و فرض کنید که b و $I = (a_i | i < k)$ ناقضِ ۴ اند. پس برای هر $i < k$ یک فرمولِ $\phi_i(x; y_1, \dots, y_{n_i}) \in L$، یک عددِ $k_i < \omega$ و اندیس های $j_{i1} < \dots < j_{in_i}$ همه مخالفِ i را چنان بگیرید که $\models \phi_i(b; a_i, a_{j_{i1}}, \dots, a_{j_{in_i}})$ و $\phi_i(x; a_i, a_{j_{i1}}, \dots, a_{j_{in_i}})$ نسبت به k_i روی $I_{\neq i}$ بخش شود. بنا به گزینشِ κ (کاپا) می‌توان انگاشت که برای یک $k, n < \omega$ که ثابت گرفته شده اند، $k_i = k$ و $n_i = n$ و $\phi_i(x; a_i, a_{j_{i1}}, \dots, a_{j_{in_i}}) = \phi(x; y_1, \dots, y_n)$. بگیرید: $X_i = \{i, j_{i1}, \dots, j_{in}\}$ و $a'_i = a_i a_{j_{i1}}, \dots, a_{j_{in_i}}$. بنا به لمِ دلتا در نظریه‌ی مجموعه، یک مجموعه‌ی ناشمارای X از اندیس ها و یک مجموعه‌ی متناهیِ r از اندیس ها یافت می‌شود که برای هر دو $i, l \in X$ نابرابر، $X_i \cap X_l \subseteq r$. پس از بازشماریِ اندیس ها، فرض می‌کنیم $\omega \subseteq X - r$. بنابراین اگر $i, l < \omega$ متفاوت باشند، آنگاه $i \notin X_l$. پس هر عنصر در $\{a_l | l < \omega, l \neq i\}$ یک چندتائی از عناصرِ مجموعه $I_i = \{a'_l | l < \omega, l \neq i\}$ است. از آن جا که $\phi(x, a'_i)$ روی $\{a_l | l < \omega, l \neq i\}$، k–بخش می‌شود، روی I_i هم این فرمول k بخش می‌شود. آرایه‌ی خواسته‌ی ۳ را با گُزیدنِ $(a'_i : i < \omega)$ برای ستونِ نخست، و به دست آوردن سطرِ i ام چونان شاهدی برای k–بخش شدنِ $\phi(x; a'_i)$ روی I_i می‌سازیم.

□

گزاره ۹۴. ۱. تئوری های ساده کشسانند.

۲. تئوری های نیپ، کشسانند.

۳. تئوری های کشسان، اِن‌تی‌پی‌دو اند.

اثبات ۲. فرض کنید T کشسان نباشد. بنا به گزاره‌ی ۹۳ دنباله‌های $I = (a_i | i \in \mathbb{Z})$ و $J = (b_i | i \in \mathbb{Z})$ و یک فرمولِ $\phi(x, y) \in L$ هستند که I نا تمیز است، $a_0 = b_0$ و J روی $a_{\neq 0}$ بازنشناختنی است و $\phi(x, I)$ سازگار و $\phi(x, J)$ ناسازگار است. با استقرا روی k سازگاریِ

$$\{\neg\phi(x, a_{2i}) \wedge \phi(x, a_{2i+1}) | 0 \leq i < k\} \cup \{\phi(x, a_i) | i < 0 \text{ یا } i \geq 2k\}\}$$

را نشان می دهیم. این نشان می‌دهد که $\phi(x, y)$ دارای آی پی است. حالتِ $k = 0$ روشن است. فرض کنید حکم برای k درست باشد. بنا به بازنشناختگی I یک برآورنده‌ی b برای

$$\{\neg\phi(x, a_{2i}) \wedge \phi(x, a_{2i+1}) : 1 \leq i < k + 2\} \cup \{\phi(x, a_i) : i < 1 \text{ یا } i \geq 2k + 2\}$$

هست. از آن جا که $\phi(x, J)$ ناسازگار است، یک $j \in \mathbb{Z}$ هست که $\neg\phi(b, b_j)$. بنا به بازنشناختگی J روی $a_{\neq 0}$ مجموعه زیر از فرمولها سازگار است:

$$\{\neg\phi(x, a_{2i}) \wedge \phi(x, a_{2i+1}) | 1 \leq i < k+2\} \cup \{\phi(x, a_i) | i < 0 \text{ یا } i \geq 2k+2\} \cup \{\neg\phi(x, a_0) \wedge \phi(x, a_1)\}$$

□

گزاره ۹۵. فرض کنید T کشسان، A یک پایه‌ی گسترش و $I = (a_i)_{i < \omega}$ یک دنباله‌ی A–بازنشناختنی باشند. I روی A یک شاهد است اگر و تنها اگر $a_i \not\downarrow_A a_{\neq i}$؛ برای همه‌ی $i < \omega$.

پُرسش ۱. آیا تئوری های اِن‌تی‌پی‌دوی ناکشسا هم داریم؟

۱۹ فرمولهای پائین

تعریف ۹۶. فرمولِ $\phi(x,y) \in L$ را **پائین** می گویند اگر یک $k < \omega$ باشد که برای هر دنباله‌ی بازنشناختنیِ $I = (a_i | i < \omega)$، اگر $\phi(x,I)$ ناسازگار است، آنگاه k–ناسازگار باشد. تئوریِ T را پائین می‌خوانند اگر همه‌ی فرمولهای آن پائین باشند. این تعریف با تعریف های استانداردِ این مفهموم هم خوانی ندارد؛ زیرا که در این جا، تئوری های پائین، می‌توانند ناساده باشند.

چند تعریف از مبحث سادگی را به یاد می آوریم:

- فرمولِ $\phi(x,y)$ را می گوئیم که α بار بخش می‌شود هرگاه یک دنباله‌ی $I = (a_i | i < \alpha)$ باشد که $\phi(x,I)$ سازگار است و هر $\phi(x,a_i)$ روی $a_{<i}$ بخش می‌شود.
- بگذارید $\pi(x)$ یک تایپِ جزئی روی A باشد. منظور از $D(\pi(x),\phi)$، سوپرمِم اردینالهای α ای است که برایشان دنباله‌ای چون $I = (a_i | i < \alpha)$ هست که $\pi(x) \cup \phi(x,I)$ سازگار است و هر $\phi(x,a_i)$ روی $Aa_{<i}$ بخش می‌شود.
- بگذارید $\pi(x)$ یک تایپِ جزئی روی A باشد و $k < \omega$. منظور از $D(\pi(x),\phi,k)$ سوپرمِم اُردینالهائی (در واقع اعداد طبیعی ای) چون α است که برایشان دنباله‌ای چون $I = (a_i | i < \alpha)$ هست که $\pi(x) \cup \phi(x,I)$ سازگار است و $\phi(x,a_i)$ روی $Aa_{<i}$، k–بخش می‌شود.

خوش دانسته است که شماره‌های زیر معادل اند:

۱. T ساده است.

۲. برای هر ϕ، $D(x=x,\phi,k) < \omega$.

۳. هیچ فرمولی ω_1 بار بخش نمی‌شود.

۴. برای هر ϕ و $k < \omega$ یک $n < \omega$ هست که ϕ، n بار k–بخش نمی‌شود.

در زیر شماری از ویژگی ها آورده‌ایم که بعدا آن‌ها را به بحث خواهیم کشاند.

۱. $\phi(x,y)$ پائین است.

۲. یک $k < \omega$ هست که برای همه‌ی A و a ها، اگر $\phi(x,a)$ روی A بخش شود، k بار بخش می‌شود.

۳. یک $k < \omega$ هست که برای هر تایپِ جزئیِ $\pi(x)$، $D(\pi,\phi) = D(\pi,\phi,k)$

۴. $D(x=x,\phi) < \omega$.

۵. یک $n < \omega$ هست که برای هر $k < \omega$، $D(x=x,\phi,k) < \omega$.

۶. برای یک $n < \omega$، $\phi(x,y)$ بیشینه n بار بخش می‌شود.

۷. برای هر طول از چندتائی های b، $\{(a,b) : \phi(x,a)$روی bبخش می‌شود$\}$، تایپ‌تعریف‌شدنی است.

اگر T ساده باشد، دانسته است که همه‌ی ویژگی های بالا برای آن معادلند. هم چنین در حالت کلی دلالت های زیر برقرارند:

$$۴ \Leftrightarrow ۵ \Leftrightarrow ۶ \Rightarrow ۱ \Rightarrow ۲ \Rightarrow ۳ \text{ و } ۲ \Rightarrow ۷$$

همان گونه که گفتیم اگر ۴ (یا ۵ یا ۶) برای همه‌ی ϕ ها برای یک تئوری برقرار باشد، آن تئوری ساده است.

ملاحظه ۹۷. اگر ϕ نیپ باشد، پائین است با $k = \text{alt}(\phi)$.

اثبات. فرض کنید $I = (a_i | i < \omega)$ بازنشناختنی باشد، $k = \text{alt}(\phi)$، $\phi(x, I)$، k–سازگار و برای یک $m > k$، m–ناسازگار است. فرض کنید b برآورنده‌ی فرمولِ زیر باشد:

$$\phi(x, a_0) \wedge \phi(x, a_m) \wedge \ldots \wedge \phi(x, a_{(k-1).m})$$

بنا به m–بازنشناختگی، برای هر $i < (k-1)$ یک j_i هست که $i.m < j_i < (i+1).m$ و $\models \neg\phi(b, a_{j_i})$. آنگاه ولی $\phi(x, a_i)$ بیش از k بار برآورده–نابرآورده می‌شود که این تناقض است. $\square$

۲۰ شرطِ زنجیری

تعریف ۹۸. قضیه‌ی ضعیفِ استقلال روی A گزاره پیش رو است: اگر $b \equiv^{ls}_A b'$ و $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A bb'$ و $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A ab$ آنگاه c' ای هست که $c'a \equiv_A ca$ و $c'b' \equiv_A cb$ و $c' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A ab'$.

یاد آرید که **قضیه‌ی استقلال** روی A (که در تئوری‌های ساده برقرار است) می گوید: اگر $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A b$، $c_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A a$ و $c_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A b$، آن گاه یک $c' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A ab$ هست که $c' \equiv_{Aa} c_0$ و $c' \equiv_{Ab} c_1$.

ملاحظه ۹۹. قضیه‌ی استقلال روی A، قضیه‌ی ضعیف استقلال روی A را به دست می‌دهد.

اثبات. بگیرید $c_0 = c$ و c_1 را به گونه‌ای بگیرید که $c_0 b \equiv^{ls}_A c_1 b'$. آنگاه $c_0 \equiv^{ls}_A b'$ و $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A b'$ و $c_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A a$ و $c_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A b'$. بنا به قضیه‌ی استقلال، یک $c' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A ab'$ که $c' \equiv_{Aa} c_0 = c$ و $c' \equiv_{Ab'} c_1$. آنگاه $c'b' \equiv_A c_1 b' \equiv_A c_0 b = cb$. $\square$

یاد آرید که T را G–فشرده روی A می گویند هر گاه $\equiv^{lp}_A = \equiv^{ls} = \equiv$؛ معادلاً، هرگاه n ای باشد که برای هر a, b، $a \equiv^{ls}_A b$ اگر و تنها اگر $d_A(a, b) \leq n$. تئوری های ساده G–فشرده‌اند با $d_A \leq 2$. فاصله، برای یادآوری، چنین تعریف می‌شود که $d_A(a, b)$ صفر است اگر $a = b$، بی نهایت است اگر $a \not\equiv^{ls} b$، و در باقی حالات کوچک ترین $n < \omega$ ای است که چندتائی های b_0، ...، b_n و دنباله‌های A–بازنشناختنیِ I_1،...، I_n باشند که $a = b_0$، $b = b_n$ و برای هر $i < n$، $b_i, b_{i+1} \in I_{i+1}$.

گزاره ۱۰۰. اگر $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}^d_A = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A$ و قضیه‌ی ضعیفِ استقلال روی A برقرار باشد، آنگاه T، G– فشرده روی A است با فاصله‌ی $d_A \leq 3$.

تعریف ۱۰۱. گوئیم که T روی A **شرطِ زنجیری** دارد اگر برای هر $\phi(x, y) \in L$، اگر $d_A(a_0, a_1) \leq 1$ و $\phi(x, a_0)$ روی A نفرکد، آنگاه $\phi(x, a_0) \wedge \phi(x, a_1)$ روی A نفرکد.

لم ۱۰۲. بگذارید $\kappa \geq |A| + |T|$. برای هر دنباله‌ی $(a_i | i < (2^\kappa)^+)$ با $|a_i| \leq \kappa$، هستند $i < j < (2^\kappa)^+$ که $d_A(a_i, a_j) \leq 1$.

اثبات. رابطه‌ی $d_A(x, y) \leq 1$ به کمکِ تایپِ $\text{nc}_A(x, y)$ برگرفته از همه‌ی فرمولهای ضخیمِ $\theta(x, y) \in L(A)$، تایپ‌تعریف شدنی است. (فرمولِ $\theta(x, y)$ **ضخیم** [43] است هرگاه‌یک رابطه‌ی تقارنی تعریف کند و برای یک $n < \omega$، هیچ دنباله‌ی $a_0, \ldots, a_{n-1}$ ای نباشد که برای همه‌ی $i < j < n$، $\models \neg\theta(a_i, a_j)$.) فرض کنید برای همه‌ی $i < j < (2^\kappa)^+$، $d_A(a_i, a_j) > 2$. آنگاه برای هر یک چنین i و j یک فرمولِ ضخیمِ $\theta_{ij}(x, y) \in L(A)$ یافت می‌شود که $\models \neg\theta_{ij}(a_i, a_j)$. بنا به لم اردوش رادو، یک $I \subseteq (2^\kappa)^+$ از اندازه‌ی κ^+ و یک فرمولِ ضخیمِ $\theta(x, y)$ هستند که برای همه‌ی $i < j \in I$، $\theta_{ij} = \theta$. این تناقض است. $\square$

[43] thick

گزاره ۱۰۳. شماره‌های زیر برای هر A با هم معادلند:

۱. T روی A شرط زنجیری دارد.

۲. برای هر کاردینالِ $\kappa \geq |T|+|A|$ و هر خانواده‌ی $(\pi_i(x)|i<(۲^\kappa)^+)$ از تایپ های جزئیِ با اندازه‌ی $\leq \kappa$، هستند $i<j<(۲^\kappa)^+$ که $\pi_i(x)\cup\pi_j(x)$ روی A نفرکد.

۳. برای هر کاردینالِ $\kappa \geq |T|+|A|$ و هر خانواده‌ی $(\phi_i(x,a_i)|i<(۲^\kappa)^+)$ از فرمولهای نافرکان روی A که $\phi_i(x,y_i)\in L(A)$، هستند $i<j<(۲^\kappa)^+$ که $\phi_i(x,a_i)\wedge\phi_j(x,a_j)$ روی A نفرکد.

۴. اگر $\pi(x,y)$ یک تایپِ جزئی روی A، $(a_i|i<\omega)$ دنباله‌ای A–بازنشناختنی و $\pi(x,a_i)$ روی A نفرکیده باشند، آنگاه $\bigcup_{i<\omega}\pi(x,a_i)$ روی A نفرکد.

۵. اگر $I=(a_i|i<\omega)$ دنباله‌ای A–بازنشناختنی باشد و $b\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A a_\circ$ آنگاه $b'\equiv_{Aa_\circ}b$ ای هست که I، Ab'–بازنشناختنی باشد و $b'\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A I$.

اثبات. اثباتِ ۱ به ۲: فرض کنید $\pi(x)=\{\phi_{ij}(x,a_i)|j<k\}$ که در آن $\phi_{ij}\in L$. فرض می‌کنیم هر π تحتِ عطفِ فرمولها بسته است. بنا به اصلِ لانه‌ی کبوتری فرض می‌کنیم که برای همه‌ی i و j ها، $\phi_{ij}=\phi_j$ (از آن جا که تعداد تایپ ها زیاد و اندازه‌ی زبان کوچک است، بسیاری فرمولها تکراری اند).
بنا به لمِ ۱۰۲ $i<j<(۲^k)^+$ هائی هستند آنچنانکه $d_A(a_i,a_j)\geq ۱$. ادعا می‌کنیم که $\pi_i(x)\cup\pi_j(x)$ روی A نمی‌فُرکد: اگر نه چنین باشد، یک $l<k$ آنچنان یافت می‌شود که $\phi_l(x,a_i)\wedge\phi_l(x,a_j)$ روی A بفرکد، ناقضِ ۱.

□

لم ۱۰۴. اگر $d_A(a,b)\geq ۱$ و $c\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}_{Aa} b$ آنگاه برای یک d، $d_A(ac,bd)\geq ۱$.

گزاره ۱۰۵. اگر T شرط زنجیری روی A داشته باشد، قضیه‌ی ضعیفِ استقلال روی A برقرار است.

۲۱ بخشِ آرایه‌ای

تعریف ۱۰۶. فرض کنید $\phi(x,y)\in L(A)$. می گوئیم $\phi(x,a)$ روی A **بخشِ آرایه‌ای می‌شود** [۴۴] هر گاه برای یک آرایه‌ی A–بازنشناختنیِ $\mathbb{A}=(a_{ij}|i,j<\omega)$ با $a_{\circ\circ}\equiv_A a$، $\phi(x,\mathbb{A})$ ناسازگار باشد.

ملاحظه ۱۰۷. اگر $\phi(x,a)$ روی A بخش شود، روی آن بخشِ آرایه‌ای می‌شود.

اثبات. بگذارید دنباله‌ی A بازنشناختنیِ $I=(a_i|i<\omega)$ شاهدِ بخش شدن $\phi(x,a)$ روی A باشد. آنگاه آرایه‌ی $(a_{ij}:i,j<\omega)$ با $a_{ij}=a_j$ (که همه‌ی سطرهای آن برابر با I اند)، شاهدِ بخش شدنِ آرایه‌ای $\phi(x,a)$ روی A است. □

ملاحظه ۱۰۸. اگر فرض کنیم که بخش شدن روی A شرطِ زنجیری دارد (یعنی هر گاه $d_A(a_\circ,a_۱)\geq ۱$ و $\phi(x,a_\circ)$ روی A بخش **نکند** آنگاه $\phi(x,a_\circ)\wedge\phi(x,a_۱)$ روی A بخش نمی‌شود)، بخش شدن و بخش شدنِ آرایه‌ای روی A بر هم می افتند.

[۴۴] array divides over

اثبات. فرض کنید $\phi(x,a)$ روی A بخش نشود و $\mathbb{A}=(a_{ij}|i,j<\omega)$ آرایه‌ای A بازنشناختنی باشد با $a=a_{\circ\circ}$. نشان می دهیم $\phi(x,\mathbb{A})$ سازگار است. با به کار گیریِ چند باره‌ی شرط زنجیری برای بخش نشدنِ $\bigwedge_{i<n}\phi(x,a_{i\circ})$ روی A بخش نمی‌شود. به همان دلیل، $\bigwedge_{i,j<n}\phi(x,a_{ij})$ روی A بخش نشده از آن رو سازگار است. □

تعریف ۱۰۹. فرض کنید $\mathbb{A}=(a_{ij}|i,j<\omega)$ یک آرایه باشد و $n<\omega$. آرایه‌ی $\mathbb{A}^{n\rightarrow}=(b_{ij}|i,j<w)$ با به هم چسباندن هر n عنصر پشت سر هم روی سطرهای آرایه‌ی $\mathbb{A}$ به دست می آید:

$$\begin{aligned}&b_{i\circ}=a_{i\circ},\dots,a_{i,n-1}\\&b_{i1}=a_{i,n},\dots,a_{i,2n-1}\\&\cdots\end{aligned}\tag{۷}$$

به همین ترتیب، آرایه‌ی $\mathbb{A}^{n\downarrow}=(c_{ij}|i,j<\omega)$ با به هم چسباندن هر n عنصر پشت سر هم در ستونهای $\mathbb{A}$ به دست می آید:

$$\begin{aligned}&c_{i\circ}=a_{\circ,j},\dots,a_{n-1,j}\\&c_{i1}=a_{n,j},\dots,a_{2n-1,j}\\&\cdots\end{aligned}\tag{۸}$$

ملاحظه ۱۱۰. اگر $\mathbb{A}$ (بسیار) بازنشناختنی روی A باشد، هم چنین اند $\mathbb{A}^{n\rightarrow}$ و $\mathbb{A}^{n\downarrow}$.

لم ۱۱۱. اِن‌تی‌پی‌دو را فرض کنید. بگذارید $\mathbb{A}=(a_{i,j}|i,j<\omega)$ روی A بسیار بازنشناختنی و $I=(a_{i\circ}|i<\omega)$ ستون اول آن باشد. برای یک $\phi(x,y)\in L(A)$ اگر $\phi(x,I)$ سازگار باشد، هم چنین است $\phi(x,\mathbb{A})$.

بگذارید $A^{n\downarrow}=(b_{ij}|i,j<\omega)$ باشد و $I=(b_{\circ j}:j<\omega)$ نخستین سطر آرایه‌ی $\phi^n(x;y_\circ,\dots,y_{n-1})=\bigwedge_{i<n}\phi(x,y_i)$. قرار است سازگاری $\phi^n(x,I)$ بررسی شود. اگر ناسازگار باشد، آنگاه k–ناسازگار است برای یک k و بنا به بازنشناختنیی همان k–ناسازگاری در سطرهای $\mathbb{A}^{n\downarrow}$ برقرار است. اگر J نخستین ستونِ $\mathbb{A}^{n\downarrow}$ باشد آنگاه $\phi^n(x,J)$ سازگار است. بنا به دو به دو بازنشناختگی به‌یک اینپارایه می رسیم.

لم ۱۱۲. اِن‌تی‌پی‌دو را را فرض کنید و بگذارید $\mathbb{A}=(a_{ij}|i,j<\omega)$ روی A نا تمیز، $D=(a_{ii}|i<\omega)$ قُطرِ آن و $D'=(b_{ii}|i<\omega)$ قطرِ $\mathbb{A}^{n\rightarrow}$ باشند. برای یک $\phi(x,y)\in L(A)$ اگر $\phi(x,D)$ سازگار باشد، آنگاه $\phi^n(x,D')$ نیز سازگار است.

اثبات. $\mathbb{A}$ را به یک آرایه‌ی دو به دو بازنشناختنیِ $(a_{ij}|i<\omega,j<w.w)$ می گسترانیم. بگذارید $\mathbb{B}$ آرایه‌ی با ابعادِ $\omega\times\omega$ ی با سطرِ اولِ $(a_{\circ j}|j<\omega)$، سطر دومِ $(a_{1,\omega+j}|j<\omega)$ و ... باشد. هشدارید که $\mathbb{B}$ روی A بسیار بازنشناختنی است. ستونِ نخستِ $\mathbb{B}$، $J=(a_{i,w.i}|i<\omega)$ است. بنا به A–بازنشناختنیِ گسترشِ آرایه، $J\equiv_A D$ و از این رو $\phi(x,J)$ سازگار است. بنا به لمِ ۱۱۱، $\phi(x,\mathbb{B})$ سازگار است. بگذارید $\mathbb{B}^{n\rightarrow}=(b'_{ij}|i,j<\omega)$. بنا به A–بازنشناختنیِ گسترشِ آرایه $b_{\circ\circ},\dots,b_{mm}\equiv_A b'_{\circ\circ},\dots,b'_{mm}$ و بنابراین، $\phi^n(x,D')$ سازگار است.

□

گزاره ۱۱۳. به فرض اِن‌تی‌پی‌دو، اگر $\mathbb{A} = (a_{ij}|i,j < \omega)$ روی A نا تمیز باشد، $D = (a_{ii}|i < \omega)$ قطر آن باشد $\phi(x,y) \in L(A)$ فرمولی باشد که $\phi(x,D)$ سازگار است، آنگاه $\phi(x,\mathbb{A})$ سازگار است.

گزاره ۱۱۴. در یک تئوریِ اِن‌تی‌پی‌دو، یک فرمول روی یک A بخش می‌شود اگر و تنها اگر بر آن بخشِ آرایه‌ای شود.

اثبات. فرض کنید $\phi(x,a)$ روی A بخش نشود و بگذارید $\mathbb{A} = (a_{ij}|i,j < \omega)$، A–بازنشناختنی باشد. از آن جا که قطرِ $D = (a_{ii}|i < \omega)$ خود دنباله‌ای A–بازنشناختنی است، $\phi(x,D)$ سازگار است. حال بنا به گزاره‌ی ۱۱۴، $\phi(x,\mathbb{A})$ سازگار است. □

لم ۱۱۵. فرض کنید فرکیدن، بخش شدن و بخش شدن آرایه‌ای یکسان باشند و روی A شاهدانی باشند. آنگاه T روی A شرط زنجیری دارد.

اثبات. فرض کنید $\phi(x,y) \in L$ و $\phi(x,a_0)$ روی A نفرکد و $(a_j|j < \omega)$ بازنشناختنی باشد و $\phi(x,a_0)\wedge\phi(x,a_1)$ روی A بفرکد. دنباله را به دنباله‌ی A–بازنشناختنیِ بسیار طولانیِ $I = (a_j|j < \kappa)$ گسترانده بگیرید $p(x) = \mathrm{tp}(I/A)$. فرض کنید $(I_i|i < \omega)$ یک شاهدِ A–بازنشناختنی در $p(x)$ روی A باشد که در آن $I = I_0$ و $I_i = (a_{ij}|j < \kappa)$. بنا به انتخابِ k می‌توان یک دنباله‌ی A–بازنشناختنیِ $((a_{ij}|i < \omega)|j < \omega)$ از دنباله‌ی ستونهای آرایه‌ی $(a_{ij}|i < \omega, j < \omega)$ بدرکشید. هشدارید که آرایه‌ی $\mathbb{A} = (a'_{ij}|i,j < \omega)$ آرایه‌ای A–بازنشناختنی است. بنا به A–بازنشناختگی، برای هر $j < l < k$ فرمولِ $\phi(x,a_j)\wedge\phi(x,a_l)$ روی A می‌فرکد (و بخش می‌شود). از آن‌جا که $(I_i|i < \omega)$ یک شاهد است، مجموعه‌ی

$$\{\phi(x,a_{ij})\wedge\phi(x,a_{il})|i < \omega\}$$

ناسازگار است. بنابراین برای همه‌ی $j < l < \omega$،

$$\{\phi(x,a'_{ij}\wedge)\phi(x,a'_{il})|i < \omega\}$$

ناسازگار و به دنبالِ آن $\phi(x,\mathbb{A})$ ناسازگار است. از آن جا که $a_0 \equiv_A a'_0$، این یعنی $\phi(x,a_0)$ روی A بخشِ آرایه‌ای می‌شود (و می‌فرکد)–تناقض!

□

۲۲ اِن‌تی‌پی‌دو و میدان های تفاضُلیِ ارزیابی

در ادامه به بررسی میدان‌های ارزیابی و اِن‌تی‌پی‌دو در آن‌ها می‌پردازیم. مطالب این بخش‌ها برگردانده‌شده از [۵] است. یک گروه مرتب تفاضلی [۴۵] ساختاری به فُرمِ $\langle\Gamma,\circ,+,-,<,\sigma\rangle$ است که در آن $\langle\Gamma,\circ,+,-,<\rangle$ یک گروه آبلی و σ اتومرفیسمی از آن است. اتومرفیسمِ σ را اُمِگا صعودی، یا ω–صعودی می‌خوانیم هرگاه برای هر $\gamma \in \Gamma_{>\circ}$ و هر عددِ طبیعیِ n، $\sigma(\gamma) \geq n\gamma$؛ گروه مرتبِ تفاضُلیِ متناظر را نیز با همین نام می‌خوانیم. به گروه‌های مرتب تفاضُلی به عنوانِ ساختارهای مرتبه‌ی اول، در زبانِ $L_{ODG} = \{\circ,+,-,<,\sigma\}$ می‌پردازیم. کلاس گروه‌های مرتبِ تفاضُلیِ اُمِگا صعودی را می‌توان در این زبان اصل بندی کرد. مجموعه‌ی اصول آن را IncODG می‌نامیم. هر $\langle\Gamma,\circ,+,-,<,\sigma\rangle \models \mathrm{IncDOG}$ یک $\mathbb{Z}[\sigma,\sigma^{-1}]$ - مدولِ مرتب (و بدون تاب) است، آنگاه که $\mathbb{Z}[\sigma]$ حلقه‌ی مرتبِ چند جمله‌ایهای با شاخصِ σ باشد که $\sigma >> 1$. برای

[۴۵] ordered difference group

$p = p(\sigma) = \sum z_i\sigma^i \in \mathbb{Z}[\sigma, \sigma^{-1}]$ و $\gamma \in \Gamma$، می گذاریم: $p.\gamma := \sum z_i\sigma^i(\gamma)$. بر عکس، هر $\mathbb{Z}[\sigma, \sigma^{-1}]$ – مدول، به پیدایش مدلی از IncODG می انجامد. چنین مدلی در صورت بخش پذیری، به یک میدان برداری روی میدان کسریِ $\mathbb{Q}(\sigma)$ از $\mathbb{Z}[\sigma]$ متناظر است. تئوریِ $\mathbb{Z}[\sigma, \sigma^{-1}]$ – مدولهای مرتب بخش پذیرِ نابدیهی را با IncDODG نشان می دهیم.

حقیقت ۱۱۶. تئوریِ IncDODG تکاملِ مدلیِ IncODG است. به ویژه IncDODG سورها را حذف کرده و اُمینیمال (ترتیب کمینه) است.

برای اثبات [۶] را ببینید. برای یک $\gamma \in \Gamma \models \text{IncODG}$ و $\zeta = (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ گاهی $\sum_{i=0}^{n} z_i\sigma^i(\gamma)$ را با $\sigma^{\zeta}(\gamma)$ نشان داده‌ایم.

۱.۲۲ میدان های تفاضُلی ارزیابی

منظورِ ما از **میدان تفاضلی**، [۴۶] میدانی چون K به همراه یک اتومرفیسم مشخصِ σ است؛ یعنی همان که عموماً میدان تفاضُلیِ عکس پذیر [۴۷] نامیده اند. برای یک میدانِ تفاضلیِ K، حلقه‌ی $K[X]_\sigma =$ $K[X, \sigma(X), \sigma^2(X), \ldots]$ از چندجمله‌ای‌های تفاضلی را می‌توان تعریف کرد. در این حال σ گسترشی طبیعی به اِندُمرفیسمی از $K[X]_\sigma$ دارد و بدین ترتیب $K[X]_\sigma$، نیز یک حلقه‌ی تفاضلیِ گسترنده‌ی K است.

اگر $K \subseteq L$ گسترشی از میدان های تفاضلی و a چندتائی ای در L باشند، $K\langle a\rangle$ میدان تفاضلی تولید شده بوسیله‌ی a روی K را نشان می‌دهد که به عنوانِ میدان، برابر با $K(\sigma^z(a), z \in \mathbb{Z})$ است. یک عنصرِ $a \in L$ را σ– جبری روی K می‌خوانیم هرگاه برای یک $g(X) \in K[X]_\sigma$ که ناثابت است $g(a) = 0$؛ و گر نه، آن را σ–متعالی می‌خوانیم.

یک **میدانِ ارزیابی** با یک نگاشت پوشای $v : K \to \Gamma_\infty$ به دست می‌آید که در آن K یک میدان، Γ یک گروه مرتب آبلی و ∞ یک عنصر مشخص اند که شرطهای زیر را برمی‌آورند:

- $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$.
- برای هر $x, y \in K$، $v(xy) = v(x) + v(y)$.
- برای هر $x, y \in K$، $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

حلقه‌ی ارزیابیها با $O = \{x \in K | v(x) \geq 0\}$ تعریف می‌شود. این حلقه، موضعی است و ایده‌آلِ ماکزیمالِ آن $\mathrm{m} = \{x \in K | v(x) > 0\}$ است. **نگاشت پیمانه‌ها** $\mathrm{res} : O \to O/m =: k$ است و k حلقه‌یِ پیمانه‌های K خوانده می‌شود. گاهی به Γ و k پانویسِ K می دهیم تا معلوم شود چه میدانی مُراد است. گسترشِ $K \subseteq L$ به گسترشهای $k_K \subseteq k_L$ و $\Gamma_K \subseteq \Gamma_L$ می انجامد. [۴۸]

پیش از آن که میدان‌های تفاضلیِ ارزیابی را معرفی کنیم، چندی، جبرِ کُلّیِ میدان‌های ارزیابی را بررسی می‌کنیم.

[۴۶] difference field

[۴۷] inversive difference field

[۴۸] توجه کنید که میدان‌های ارزیابی یک تعریف معادل دیگر نیز دارند. در این تعریف، برای یک میدانِ K یک حلقه‌ی $R \subseteq K$ را یک حلقه‌ی ارزیابیها برای K می‌نامند هرگاه برای هر $x \in K$ یا $x \in R$ یا $x^{-1} \in R$. ثابت می‌شود که R یک حلقه‌ی ارزیابی برای K است اگر و تنها اگر حلقه‌ی ارزیبهای یک ارزیابیِ v روی K باشد.

۲.۲۲ گسترش میدان‌های ارزیابی

قضیه ۱۱۷ ([۷]). فرض کنید K یک میدان، Γ زیرگروه مرتبی از یک گروه مرتبِ Γ'، $v : K \to \Gamma \cup \{\infty\}$ یک ارزیابی و $\gamma \in \Gamma'$ باشند. برای $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$ تعریف کنید

$$w(f) := \begin{cases} \infty & \text{اگر } f = 0 \\ \min_{0 \le i \le n}\{v(a_i) + i\gamma\} & \text{وگرنه.} \end{cases} \tag{۹}$$

برای $f, g \in K[X]$ بگذارید $w(f/g) = w(f) - w(g)$. فرمولهای گفته شده یک ارزیابیِ $w : K(X) \to \Gamma \cup \{\infty\}$ تعریف می کند که v را می گستراند.

نتیجه ۱۱۸. فرض کنید $v : K \to \Gamma \cup \{\infty\}$ یک ارزیابی روی میدانِ K باشد، Γ یک زیرگروهِ مرتب از گروه مرتبِ Γ' باشد و $\gamma \in \Gamma'$ این ویژگی را بدارد که اگر $n \in \mathbb{Z}$ چنان باشد که $n\gamma \in \Gamma$ آنگاه $n = 0$. آنگاه، **دقیقاً** یک ارزیابیِ w روی $K(X)$ هست که v را بگستراند و $w(X) = \gamma$. برای این ارزیابیِ w داریم $k_{K(X)} = k_K$ و $w(K(X)^+) = \Gamma \oplus \mathbb{Z}_\gamma$ با ترتیبِ آمده از Γ.

قضیه ۱۱۹ (شوالی، [۷]، صفحه‌ی ۶۴). بگذارید R زیرحلقه‌ای از یک میدانِ K و $p \subseteq R$ ایده‌آل اولی از آن باشند. آنگاه یک حلقه‌ی ارزیابیِ O از K هست که

$$R \subseteq O \text{ و } \mathrm{m} \cap R = p$$

که m ایده آلِ ماکزیمالِ O است.

قضیه ۱۲۰. بگذارید $(K_1, O_1) \subseteq (K_2, O_2)$ و K_2 یک توسیعِ جبریِ K_1 باشد. آنگاه

۱. برای هر $\gamma \in \Gamma_2$ یک $n \in \mathbb{N}$ هست که $n\gamma \in \Gamma_1$ (یعنی Γ_2/Γ_1 یک گروه تابدار است)

۲. k_{K_2} یک گسترشِ جبری از k_{K_1} است.

یادآوری می‌کنیم که گسترشِ جبریِ L/K از میدان ها را نرمال می‌خوانند هرگاه L میدان تجزیه‌ی (میدانِ شکافنده‌ی) [۴۹] خانواده‌ای از چند جمله‌ای ها در $K[X]$ باشد.

قضیه ۱۲۱ ([۷]). فرض کنید L/K یک گسترش نرمالِ متناهی از میدان ها باشد. فرض کنید O' و O'' دو حلقه‌ی ارزیابی در L باشند که هردو O_K را گسترش اند. آ نگاه O' و O'' روی K همنهشتند؛ یعنی یک $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)$ هست که $\sigma(O') = O''$.

بگذارید $v : K \to \Gamma$ یک ارزیابی باشد و فرض کنید $L > K$ یک گسترش از میدان ها باشد. آنگاه هستند یک گروه ارزیابیِ $\Delta \ge \Gamma$ و یک ارزیابی $w : L \to \Delta$ که v را بگستراند.

تعریف ۱۲۲. یک میدان ارزیابیِ (K, v, Γ) را هِنْسِلی [۵۰] می‌خوانیم هرگاه ارزیابیِ v بیکتائی به $\tilde{K}$، بستارِ جبریِ K، بگسترد. منظور از «هنسلانده»ی [۵۱] یک میدان ارزیابیِ (K, v) یک گسترشِ (K', v') از میدان‌های ارزیابی است که در آن

---

[۴۹] splitting field
[۵۰] Henselian
[۵۱] Hensilisation

- $[K', K]$ یک گسترشِ میدانیِ جبری است.
- $[K', v']$ هنسلی است.
- برای هر (K'', v'') که شرطهای ۱ و دو را برآورد یک K- هومرفیسم یکتایِ $\rho : K' \to K''$ هست که $v \circ \rho = v$.

چند نکته‌ی درخور توجه:

۱. هنسلی بودن ارثی است. یعنی اگر $(K_۱, O_۱) \subseteq (K_۲, O_۲)$ یک گسترش میدان های ارزیابی باشد که در آن $K_۲$ یک گسترش جبریِ $K_۱$ است، آنگاه اگر $(K_۱, O_۱)$ هنسلی باشد، هم چنین است $(K_۲, O_۲)$

۲. برای هنسلاندنِ (=به دست گرفتن یک هنسلانده از) (K, v) نخست آن را به (K^s, v^s) می‌گسترانیم که K^s بستارِ جداشدنیِ [۵۲] K است. می گیریم

$$G := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(K^s, K) : v^s \circ \sigma = v^s\}$$

آنگاه $\mathrm{Fix}(G)$ با تحدیدِ v^s هسنلانده‌ی (K, v) است.

قضیه ۱۲۳. فرض کنید (K, v, Γ, R) یک میدان ارزیابی با حلقه‌ی ارزیابیهای R باشد. آنگاه شماره‌های زیر با هم معادلند:

۱. (K, v, Γ) هنسلی است.

۲. اگر $f \in R[X]$ یک چندجمله‌ای یکانی باشد که $\bar{f}$ (ترجمه‌ی f در $k_K[X]$) یک ریشه‌ی ساده‌ی $\bar{b}$ (منظور $\mathrm{res}(b)$ است) در میدان پیمانه‌های k_K دارد، آنگاه f ریشه‌ای چون $a \in R$ دارد که $\bar{a} = \bar{b}$.

۳. اگر $f \in R[x]$ یکانی باشد و $b \in R$ چنان باشد که $v(f'(b)) > ۰$ و $v(f(b)) = ۰$ آنگاه f ریشه‌ای چون a در R دارد که $\bar{a} = \bar{b}$.

۳.۲۲ میدانهای ارزیابیِ بسته‌ی جبری

مطالب این بخش عمدتاً از [۸] می‌آید. فرض کنید (K, v, Γ) یک میدان ارزیابیِ بسته‌ی جبری باشد. آنگاه

۱. Γ بخش پذیر است.

۲. k بسته‌ی جبری است.

مثال ۱۲۴. یک عدد اولِ p را برجا بدارید. ارزیابیِ $v_p : Q \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ را چنین تعریف کنید: $v_p(a/b) = s - t$ که در آن $a = p^s m$ و $b = p^t n$ و $(p, m) = (p, n) = ۱$. میدانِ پیمانه‌ها، میدانِ متناهیِ $\mathbb{F}_p$ است. این ارزیابی را می‌توان روی $\mathbb{Q}$ به یک قدر مطلق $|-|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^{\geq ۰}$ با تعریفِ $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ دگَرانید. کامل شده‌ی $\mathbb{Q}$ نسبت به این قدر مطلق (یعنی حلقه‌ی دنباله‌های کُشی آن به پیمانه‌ی ایده‌آل دنباله‌های صفر) را $\mathbb{Q}_p$ می‌نامیم. قدر مطلق بالا از $\mathbb{Q}$ به $\mathbb{Q}_p$ می گسترد. و از آن (طبق ویژگی های ارزیابی های ارشمیدسی و بنا به بحث‌های صفحه‌های ۲۷، ۲۸ و ۲۹ در [۷]) یک نگاشت ارزیابی روی

[۵۲] seperable closure

$\mathbb{Q}_p$ به دست می آید که گروه ارزیابی آن دوباره $\mathbb{Z}$ و میدان پیمانه‌های آن $\mathbb{F}_p$ است. حلقه‌ی ارزیابیِ $\mathbb{Q}_p$ را عموماً با $\mathbb{Z}_p$ نشان داده آن را حلقه‌ی اعدادِ p–جمعی می‌نامند. سازو کارِ معادل رسیدن به $\mathbb{Z}_p$ گرفتن حد معکوس حلقه‌های $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ است. در این حال $\mathbb{Q}_p$ حلقه‌ی کسرهای آن است. این ارزیابی را می‌توان به $\widetilde{\mathbb{Q}_p}$ (که تیلْدا بستار جبری را نشان می‌دهد) و به کامل شده‌ی متریک آن $\mathbb{C}_p$ نیز گستراند و آنگاه، گروه ارزیابیها $(\mathbb{Q}, <, +)$ خواهد بود و میدان پیمانه‌ها $\widetilde{\mathbb{F}_p}$. بر خلافِ $\mathbb{R}$ که بستار جبری آن $\mathbb{C}$ از درجه ی ۱ است، $\mathbb{Q}_p$ بینهایت گسترش جبری دارد و درجه‌ی $\widetilde{\mathbb{Q}_p}$ روی $\mathbb{Q}_p$ بی‌نهایت است.

۴.۲۲ حذفِ سور در میدانهای ارزیابی بسته‌ی جبری

با L_v زبانِ برگرفته از زبانِ حلقه‌ها $\{+, \times, -, ۰, ۱\}$، به همراه رابطه‌ی دوتائی‌ای که با $v(x) \leq v(y)$ تعبیر می‌شود را نشان داده‌ایم. همچنین بگذارید L_Γ زبان دوبخشه‌ی برگرفته از زبانِ حلقه‌ها برای K و زبانِ $\{<, +, -, ۰\}$ برای Γ و یک نماد تابعی برای $v : K \to \Gamma$ باشد. افزون بر این، بگذارید $L_{k,\Gamma}$ یک زبان سه‌بخشه برای k، K و Γ باشد. این زبان از نمادهای زبانی برای L_Γ همراه زبان حلقه‌ها برای k و یک نماد تابعیِ $Res : K^۲ \to k$ برای تابعِ $Res(x, y) = \mathrm{res}(xy^{-۱})$ اگر $v(x) \geq v(y)$ و گرنه $Res(x, y) = ۰$ برگرفته شده است.

قضیه‌ی زیر از رابینسون است (اثباتِ مفصّل آن را در [۹] بیابید).

قضیه ۱۲۵. ۱. در زبانِ L_v تئوری‌ای که جمله‌های آن بیانگر اینند که

(آ) K یک میدان بسته‌ی جبری است،

(ب) عناصرِ $x, y \in K^*$ هستند که $v(x) < v(y)$ و

(ج) مقادیرِ $\mathrm{char}\, K$ و $\mathrm{char}\, K$ کدام است،

یک تئوریِ کامل است.

۲. میدان‌های ارزیابیِ بسته‌ی جبری در هر سه زبانِ L_v، L_Γ و $L_{k,\Gamma}$ حذفِ سور دارند.

گزاره ۱۲۶. در میدان‌های ارزیابیِ بسته‌ی جبری

۱. Γ ثابت نشانده است.

۲. k ثابت نشانده است.

۳. k یک میدان بسته‌ی جبریِ «محض» است؛ یعنی، هر زیرمجموعه‌ی k^n که $\emptyset$ تعریف‌شدنی باشد در $(k, +, .)$ تعریف می‌شود.

۴. k بسیار کمینه و Γ ترتیب کمینه [۵۳] است.

منظور از یک گوی باز در یک میدان ارزیابی، مجموعه‌ای ناتهی چونان $B_{>\gamma} = \{x \in K : v(x-a) > \gamma\}$ است. یک گوی بسته نیز مجموعه‌ای چون $B_{\geq\gamma} = \{x \in K : v(x-a) \geq \gamma\}$ است. در هر دوی این تعریف ها $a \in K$ و $\gamma \in \Gamma \cup \{\infty\}$ است.

گزاره ۱۲۷. بگذارید (K, v, Γ) مدلی از تئوری میدانهای ارزیابیِ بسته‌ی جبری باشد. آنگاه هر زیر مجموعه‌ی تعریف‌شدنی از K ترکیبی بولی از گویهاست.

[۵۳] strongly minimal, o-minimal

۲۳ میدانهای تفاضلیِ ارزیابی

یک میدان تفاضلی ارزیابی از یک میدان ارزیابیِ K به همراه یک اتومرفیسم مشخصِ σ برگرفته می‌شود که $\sigma(O) = O$. توجه کنید که σ اتومرفیسمِ $\bar{\sigma}$ را روی میدان پیمانه‌ها ایجاد و این میدان را نیز میدان تفاضلی می‌سازد. همین سان، σ اتومرفیسمِ σ_Γ روی گروه ارزش ها را می‌دهد و از آن گروه مرتبِ تفاضلی می سازد. پانوشته‌های σ را عموماً نمی گذاریم.

میدان های تفاضلی ارزیابی را در زبانِ سه بخشیِ $L_{k,\Gamma,\sigma}$ برگرفته از شماره‌های زیر مطالعه می‌کنیم.

- زبانِ حلقه‌های دیفرانسیل تفاضلی، $L_K = \{۰, ۱, +, -, \times, \sigma\}$ برای بخش میدان تفاضلی ارزیابی، K.
- یک رونوشتِ $L_k = \{۰, ۱, +, -, \times, \sigma\}$ از زبانِ حلقه‌های تفاضلی برای بخش میدانِ پیمانه‌ها، k.
- زبانِ گروه‌های تفاضلیِ مرتب (با یک عنصر بی نهایت)، $\{۰, +, -, <, \infty, \sigma_\Gamma\}$، برای بخش گروهِ ارزیابی، Γ و
- تابع‌های $v : K \to \Gamma$ و $\mathrm{res} : K \to k$ میانِ بخش‌ها (هنگامی که یک میدان ارزیابی به عنوان یک $L_{k,\Gamma,\sigma}$- ساختار گرفته می‌شود، تابعِ res با فرستادن عناصر با ارزشِ منفی به صفرِ k، تام دانسته می‌شود).

مُراد از یک **میدانِ تفاضلیِ ارزیابی با مؤلفه‌ی زاویه‌ای**[۵۴] که آن را میدانِ تفاضلیِ م.ز. نیز خواهیم خواند، یک میدان تفاضلی ارزیابیِ $\mathcal{K} = (K, \Gamma, k, \sigma)$ به همراه یک نگاشتِ **مؤلفه‌ی زاویه‌ای**[۵۵] $\mathrm{ac} : K \to k$ است که شرطهای زیر را برآورد.

- $\mathrm{ac}(x) = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$.
- $\mathrm{ac}\restriction_{K^\times} : K^\times \to k^\times$ یک هومومرفیسم گروهی است که با σ جا به جا می‌شود.
- برای هر $x \in K$ که $v(x) = ۰$ داریم $\mathrm{ac}(x) = \mathrm{res}(x)$.

میدان های تفاضلی ارزیابی م. ز. را در زبان سه بخشیِ $L_{k,\Gamma,\sigma} \cup \{\mathrm{ac}\}$ مطالعه می‌کنیم.

۱.۲۳ حذفِ سور در میدان‌های تفاضلیِ ارزیابی

برای زیرساختارِ A از یک میدان تفاضلی ارزیابی $\mathcal{K} = (K, \Gamma_K, k_K)$ بخش‌های گوناگونِ A را با $K(A)$، $\Gamma(A)$ و $k(A)$ نشان داده‌ایم.

لم ۱۲۸. بگذارید T یک $L_{k,K,\sigma} \cup \{ac\}$–تئوری باشد. شماره‌های زیر با هم معادلند:

۱. T سورهای بخشِ K را حذف می‌کند.

۲. اگر M و N مدلهائی از T باشند و $A = (K(A), \Gamma(A), k(A)) \subseteq M$ و $A' = (K(A'), \Gamma(A'), k(A')) \subseteq N$ و فرض کنیم $f = (f_K, f_\Gamma, f_k) : A \simeq A'$ ایزومرفیسمی باشد که

[۵۴] difference valued fields with an angular component; ac-difference valued field

[۵۵] angular component

- $f_\Gamma : \Gamma(A) \to \Gamma(A')$ یک نگاشتِ $\{0, +, -, <, \infty, \sigma_\Gamma\}$–مقدماتی است و
- $f_k : k(A) \to k(A')$ یک نگاشتِ L_k–مقدماتی است،

آنگاه f یک نگاشت مقدماتی است.

لم ۱۲۹. فرض کنید T یک $L_{k,K,\sigma}$–تئوری از میدان های تفاضلی ارزیابی باشد که سورهای بخشِ K را حذف می‌کند. آنگاه شماره‌های زیر برقرارند:

۱. در هر مدلِ T $\models$ $\mathcal{K} = (K, \Gamma_K, k_K)$، $k_K = k(\mathcal{K})$ [56] ثابت‌نشانده و ساختار تولید شده با آن، ساختارِ یک میدان تفاضلی است. به همین ترتیب $\Gamma_K = \Gamma(\mathcal{K})$ ثابت‌نشانده و یک گروه مرتب تفاضلیِ محض [57] است. افزون بر این k و Γ بر هم عمودند؛ یعنی هر زیرمجموعه‌ی تعریف‌شدنی از $k^m \times \Gamma^n$ اجتماعی از مستطیلهاست.

۲. بگذارید $\mathcal{K} = (K, \Gamma_K, k_K)$ و $L = (L, \Gamma_L, k_L)$ دو مدلِ T باشند.

(آ) داریم $\mathcal{K} \equiv \mathcal{L}$ اگر و تنها اگر $k_K \equiv k_L$ (چونان میدان‌های تفاضلی) و $\Gamma_K \equiv \Gamma_L$ (چونان گروه‌های مرتبِ تفاضلی)

(ب) فرض کنید $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$. آنگاه $\mathcal{K} \preceq \mathcal{L}$ اگر و تنها اگر $k_K \preceq k_L$ و $\Gamma_K \preceq \Gamma_L$.

۳. بگذارید L/K یک گسترشِ بلافاصله‌ی [58] میدان‌های تفاضلی ارزیابی باشد

که در یک مدلِ T می زید. فرض کنید $\mathrm{ac}(K) \subseteq k_K$ و بگذارید a یک چندتائی در L باشد. آنگاه

$$\text{تایپِ بی‌سورِ}(a/K) \vdash \text{تایپِ}(a/K)$$

حقیقت ۱۳۰. فرض کنید $\mathcal{K} = (K, \Gamma, k)$ یک میدانِ ارزیابی باشد که سورهای میدانی را در زبانِ دنف پاسکال حذف کند و $T = \mathrm{Th}(\mathcal{K})$.

۱. اگر $M \models T$ و $p(x) \in S_1(M)$، آنگاه

$$p(x) \equiv \{\chi(v(x-c)) | \chi \in L_\Gamma(M), c \in M\} \cup$$
$$\{\rho(\mathrm{ac}(x-c)) | \rho \in L_k(M), c \in M\}$$

۲. هر فرمولِ $\phi(x, \bar{c})$ معادلی به شکلِ

$$\bigvee_{i<n} \chi_i(x) \wedge \rho_i(x)$$

دارد که در آن

$$\chi_i = \bigwedge \chi^i_j(v(x - c^i_j), \bar{d}^i_j)$$

که در آن

$$\chi^i_j(x, \bar{d}^i) \in L(\Gamma)$$

[56] منظور از $k(\mathcal{K})$ بخشِ زبانیِ میدان پیمانه‌ایِ $\mathcal{K}$ است.

[57] pure

[58] .

و

$$\rho_i = \bigwedge \rho_j^i(\mathrm{ac}(x - c_j^i), \bar{e}_j^i)$$

که در آن

$$\rho_j^i(x, \bar{e}_j^i) \in L(k).$$

حقیقت ۱۳۱ ([۱۰]). بگذارید T تئوریِ میدان های ارزیابی هِنسِلیِ م. ز. با مشخصه‌ی پیمانه‌ای صفر در زبانِ $L_{k,\Gamma} \cup \{ac\}$ باشد. آنگاه T سورهای K را حذف می‌کند.

برای اثبات تعریف های زیر نیاز است. فرمولِ ψ در زبانِ L را **ساده** می‌خوانیم هرگاه هیچ K–سوری نداشته باشد. فرمولی چون ϕ را Γ–ساده می‌خوانیم هرگاه هیچ سوری در بخشِ Γ نداشته باشد.

تعریف ۱۳۲. تابعِ $h : K^m \times k^n \to K : (x, \xi) \mapsto h(x, \xi)$ قویّا تعریف‌شدنی (Γ–قویا تعریف‌شدنی) است هرگاه برای هر فرمولِ ساده (Γ–ساده) یِ $\phi(t, y, \rho, k)$ یک فرمولِ ساده‌ی $\psi(x, \xi, y, \rho, k)$ باشد که

$$\phi(h(x, \xi), y, \rho, k) \leftrightarrow \psi(x, \xi, y, \rho, k).$$

به همین ترتیب می‌توان تابع های قویاتعریف‌شدنیِ (Γ–قویاً تعریف شدنی) از K^m به k را تعریف کرد.

تعریف ۱۳۳ (سلّول). بگذارید $x = (x_1, \ldots, x_m)$ چندتائی‌ای از K–متغیرها باشد و $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ چندتائی‌ای از k–متغیرها. فرض کنید C یک زیرمجموعه‌ی ساده از $K^m \times k^n$ باشد (آنکه با فرمولِ ساده‌ای تعریف شده باشد). فرض کنید $b_1(x, \xi)$، $b_2(x, \xi)$ و $c(x, \xi)$ تابعهائی قویاًتعریف‌شدنی از K به C باشند، λ یک عددِ صحیحِ مثبت باشد و $\diamondsuit_1$ و $\diamondsuit_2$ به ترتیب $<$ و $\leq$ باشند یا هیچ شرطی نباشند. برای هر $\xi \in k^n$ بگیرید

$$A(\xi) = \{(x, t) \in K^m \times K | (x, \xi) \in C, v(b_1(x, \xi)) \diamondsuit_1 \lambda . v(t - c(x, \xi)) \diamondsuit_2 \\ v(b_2(x, \xi)), \mathrm{ac}(t - c(x, \xi)) = \xi_1\}.$$

افزون‌براین فرض کنید برای همه‌ی $\xi, \xi' \in k^n$ که $\xi \neq \xi'$ داشته باشیم $A(\xi) \cap A(\xi') = \emptyset$. آنگاه $A = \bigcup_{\xi \in k^n} A(\xi)$ را یک سلول [۵۹] در $K^m \times K$ با پارامترهای $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ و مرکزِ $c(x, \xi)$ می‌خوانند. به $A(\xi)$ یک فیبر [۶۰] از این سلول می گویند.

قضیه ۱۳۴ (تجربه‌ی سلولی ۱). فرض کنید t یک K– متغیرِ یکی ای باشد و $x = (x_1, \ldots, x_m)$ یک K متغیرِ m تائی. فرض کنید $f(x, t)$ یک چندجمله‌ای در t با ضرایبِ در حلقه‌ی تابع‌های قویاًتعریف‌شدنی در x باشد. آنگاه $K^m \times K$ یک تجریه‌ی سلولی به وصف پیش رو می پذیرد: هر سلولِ $A = \bigcup_\xi A(\xi)$ در این تجریه با پارامترهای $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ و مرکزِ $c(x, \xi)$، آن چنان است که اگر بنویسیم

$$f(x, t) = \sum_{i=0}^{d} a_i(x, \xi)(t - c(x, \xi))^i$$

[۵۹] cell
[۶۰] fiber

آنگاه برای همه‌ی $\xi \in k^n$ و همه‌ی $(x,t) \in A(\xi)$ داریم

$$v(f(x,t)) = v(a_{i_\circ}(x,\xi))(t-c(x,\xi))^{i_\circ} =$$
$$\min_{\circ \leq i \leq d} v(a_i(x,\xi))(t-c(x,\xi))^i, \mathrm{ac}(f(x,t)) = \xi_{j_\circ}$$

که در آن $i_\circ \in \{\circ,\ldots,d\}$ و $j_\circ \in \{۱,\ldots,n\}$ به (x,ξ,t) بستگی ندارند.

قضیه ۱۳۵ (تجزیه‌ی سلولی ۲). فرض کنید $f_۱(x,t)$، ... ، $f_r(x,t)$ چندجمله‌ای‌هائی در t بمانند آنچه در قضیه‌ی تجزیه‌ی سلولی ۱ فرض شده است، باشند. آنگاه $K \times K^m$ یک تجزیه‌ی متناهی به سلولهای A آنچنان می‌پذیرد که هر سلول $A = \bigcup_\xi A(\xi)$ در این تجزیه با پارامترهای $(\xi_۱,\ldots,\xi_n)$ و مرکز $c(x,\xi)$ چنان است که برای هر $\xi \in k^n$ و هر $(x,t) \in A(\xi)$ و هر $i \in \{۱,\ldots,r\}$ داریم

$$v(f_i(x,t)) = v(h_i(x,\xi))(t-c(x,\xi))^{v_i}, ac(f_i(x,t)) = \xi_{\mu(i)}$$

که در بالا $h_i(x,\xi)$ (برای $i = ۱,\ldots,r$) توابعی قویاًتعریف‌شدنی‌اند و در آن $v_i \in \mathbb{N}$ ها و نگاشت $\mu : \{۱,\ldots,r\} \to \{۱,\ldots,n\}$ به (x,ξ,t) بستگی ندارند.

اثبات حقیقت ۱۳۱. باید نشان دهیم که در K هر L–فرمول با یک L–فرمول بدون سور روی بخش میدان اصلی معادل است. برای این کافی است K–سورها را از فرمولهائی به شکل

$$\exists t \quad \psi(t,x,\xi,k)$$

بزدائیم، آن جا که ψ یک L–فرمول بدون K سور، t یک K–متغیر یکی‌ای، $x = (x_۱,\ldots,x_m)$ یک چندتائی از K–متغیرها و ξ و k به ترتیب چندتائی‌هائی از k و Γ اند. فرمولهای اتمی به شکل $h(x,t) = \circ$ را که در آنها h یک چندجمله‌ای در (x,t) با ضرایب صحیح است را می‌توان با $\mathrm{ac}(h(x,t)) = \circ$ جایگزین کرد و از این رو فرض گرفته‌ایم که متغیر t در ψ تنهاً اندر K–ترمهای $\mathrm{ac}(f_۱(x,t))$، ...، $\mathrm{ac}(f_r(x,t))$ و Γ–ترم‌های $v(g_۱(x,t))$، ...، $v(g_s(x.t))$ جای گرفته‌اند (که $f_۱$، ... ، f_r و $g_۱$، ...، g_r چندجمله‌ای هائی با ضرایب صحیح در (x,t) اند). از آنجا که ϕ در بالا متغیر t ندارد می‌توان سور $\exists t$ را به پیش راند و از این رو برای اثبات قضیه همین بسنده است که بتوان سور $\exists t$ از از فرمولهائی به شکل

$$\exists t \quad [(\bigwedge_{i=۱}^{r} \mathrm{ac}(f_i(x,t))) \wedge (\bigwedge_{j=۱}^{s} v(g_j(x,t)) = l_j)] \qquad (۱\circ)$$

زُدود. با به کار بستن لم تجزیه‌ی سلولی ۲ به چند جمله‌ای های $f_۱$،...،f_r،$g_۱$،...،g_s به یک بخش‌بندی متناهی از $K \times K^m$ به سلولهای $A = \bigcup_\xi A(\xi)$ با پارامترهای $\xi = (\xi_۱,\ldots,\xi_n)$ و مرکز $c(x,\xi)$ می‌رسیم آنچنانکه برای هر $(x,t) \in A(\xi)$ داشته باشیم:

$$\mathrm{ac}(f_i(x,t)) = \xi_{\mu(i)} \quad (i = ۱,\ldots,r)$$

و

$$v(g_j(x,t)) = v(h_j(x,t))(t-c(x,\xi)^{v_j}) \quad (j = ۱,\ldots,s)$$

که در آن μ یک نگاشت از $\{1, \ldots, r\}$ به $\{1, \ldots, n\}$ است، $v_j \in \mathbb{N}$ و h_j ها توابعی قویاً تعریف شدنیند. از این رو فرض می‌کنیم که فرمولِ ۱۰ با فرمول زیر معادل است:

$$\begin{aligned} &\exists t \exists \xi_1 \ldots \xi_n [(x,t) \in A(\xi) \wedge \\ &(\bigwedge_{i=1}^{r} \xi_{\mu(i)} = \rho_i) \wedge \\ &(\bigwedge_{j=1}^{s} v(h_j(x,\xi)) + v_j(t - c(x,\xi)) = l_j).] \end{aligned} \tag{11}$$

بنا به تعریفِ سلول، شرطِ $(x,t) \in A(\xi)$ به شکلِ

$$\theta(x, \xi, v(t - c(x,\xi))) \wedge \mathrm{ac}(t - c(x,\xi)) = \xi_1$$

است که در آن θ یک فرمول ساده است. پس با معرفیِ یک Γ–متغیرِ تازه‌ی l برای $v(t - c(x,\xi))$ فرمولِ ۱۱ چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} &\exists t \exists \xi_1, \ldots, \xi_n \exists l [\theta(x, \xi, l) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{r} \xi_{\mu(i)} = \rho_i) \\ &\wedge (\bigwedge_{j=1}^{s} v(h_j(x,\xi)) + v_j.l = l_j) \wedge \\ &v(t - c(x,\xi)) = l \wedge \mathrm{ac}(t - c(x,\xi)) = \xi_1.] \end{aligned}$$

با پیش راندنِ دوباره‌ی $\exists t$ کافی است فرمولِ

$$\exists t [v(t - c(x,\xi)) = l \wedge \mathrm{ac}(t - c(x,\xi)) = \xi_1]$$

را در نظر بگیریم که از آن سورها به آسانی حذف می شوند. $\square$

تعریف ۱۳۶. میدان ارزیابیِ تفاضلیِ $\mathcal{K} = (K, \Gamma_K, k_K, \sigma)$ را **انقباضی** [۶۱] می‌خوانیم هرگاه گروه ارزیابیهای آن Γ_K، یک گروه تفاضلی مرتبِ اُمگاصعودی باشد.

بگذارید $\mathcal{K} = (K, \Gamma_K, k_K, \sigma)$ یک میدان ارزیابی تفاضلی انقباضی با میدانِ ثوابتِ $F := \mathrm{Fix}(\sigma) := \{a \in K | \sigma(a) = a\}$ باشد. آنگاه $\mathrm{res} \restriction_F$ یک‌به‌یک است. به‌ویژه $\mathrm{char}(K) = \mathrm{char}(k_K)$. (اگر $\mathcal{K}$ آنگونه که در تعریف زیر آمده است، σ–هنسلی باشد، res ایزومرفیسمی میانِ F و $\mathrm{Fix}(\bar{\sigma})$ بدست می‌دهد).

فرض کنید $g(x) \in K[X]_\sigma$ ناثابت باشد. مرتبه‌ی g، $\mathrm{order}(g)$، را کوچکترین n ای می گیریم که g را بتوان به گونه‌ی $g(X) = G(X, \sigma(X), \sigma^2(X) \ldots, \sigma^n(X))$ برای یک $G \in K[X_0, \ldots, X_n]$ نوشت. اگر مرتبه‌ی g، n باشد، پیچیدگیِ [۶۲] g را به گونه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

$$\textbf{پیچیدگی}(g) := (n, \deg_{X_n}(G), \deg(G)) \in \mathbb{N}^3$$

---

[۶۱] contractive
[۶۲] complexity

که در بالا $\deg(G)$ مجموع درجه‌های G است. می‌گوئیم g پیچیدگیِ کمتری از h دارد هرگاه (h)**پیچیدگی** $<_{\text{قاموسی}}$ (g)**پیچیدگی**. به یاد آرید که برای هر $G \in K[\bar{X}]$ چندجمله‌ای‌های یکتای $G_\mu \in K[\bar{X}]$ هستند که

$$G(\bar{Y}+\bar{X}) = \sum_{\mu} G_\mu(\bar{Y})\bar{X}^\mu.$$

در این جا $\bar{X} = (X_0, \ldots, X_n)$ و $\mu = (\mu_0, \ldots, \mu_n)$ پانویسهای چند تائی اند و $\bar{X}^\mu := \Pi_{i=0}^n X_i^{\mu_i}$.
بنابراین برای $g(X) = G(X, \sigma(X), \sigma^2(X), \ldots, \sigma^n(X)) \in K[X]_\sigma$ همانند بالا، بسطِ تیلور زیر از چندجمله‌ایهای یک متغیره‌ی تفاضلی را می گیریم:

$$g(X+a) = \sum_{\mu} g_\mu(a)X^\mu$$

که در آن برای هر چنداندیسه‌ی $\mu = (\mu_0, \ldots, \mu_n)$، $g_\mu(X) = G_\mu(X, \sigma(X), \ldots, \sigma^n(X))$ و $X^\mu := \Pi_{i=0}^n (\sigma^i(X))^{\mu_i}$. برای تعریف پیش رو نیاز به نمادگذاری داریم: برای $\mu \in \mathbb{N}^{n+1}$ و $\gamma \in \Gamma$ گرفته‌ایم $|\mu| := \sum \mu_i = 1$ و $\sigma^\mu(\gamma) := \sum_{i=0}^n \mu_i \sigma^i(\gamma)$.

تعریف ۱۳۷. فرض کنید $\mathcal{K}$ انقباضی باشد، $g(X) \in K[X]_\sigma$، $\operatorname{order}(g) \le n$ و $a \in K$. می گوئیم (g, a) در پیکربندی σ–هنسلِی [63] است هرگاه $g \notin K$ و یک $\gamma \in \Gamma_K$ و یک چنداندیسه‌ی $\mu \in \mathbb{N}^{n+1}$ با $|\mu| = 1$ باشند که شرطهای زیر را برآورند:

۱. برای هر $v \in \mathbb{N}^{n+1}$ با $|v| = 1$، $v(g(a)) = v(g_\mu(a)) + \sigma^\mu(\gamma) \le v(g_v(a)) + \sigma^v(\gamma)$؛

۲. برای هر $v, \rho \in \mathbb{N}^{n+1}$ ی ناصفر که $g_v \neq 0$،

$$v(g_v(a)) + \sigma^v(\gamma) < v(g_{v+\rho}(a)) + \sigma^{v+\rho}(\gamma).$$

می گیریم:

$$\gamma(g, a) := \text{در تعریف بالا } \gamma$$

و این $\gamma(g, a)$ یکتا است.
یک میدان ارزیابیِ تفاضلی K را σ–هنسلی می‌خوانیم هرگاه برای هر (g, a) در پیکربندیِ σ هنسلی یک $b \in K$ باشد که $v(b-a) = \gamma(g, a)$ و $g(b) = 0$.

اگر (g, a) در پیکربندیِ σ– هنسلی باشد، آنگاه برای هر $\mu \neq 0$ که $G_\mu \neq 0$ داریم $G_\mu(a) \neq 0$. بنابراین $g(a) \neq 0$. پس γ در بالا تساوی زیر را برآورده می کند:

$$v(g(a)) = \min_{|j|=1} v(G_\mu(a)) + \sigma^j \gamma.$$

ملاحظه ۱۳۸. فرض کنید g ناثابت باشد، $g(a) \neq 0$، $v(g(a)) > 0$ و برای هر $\mu \neq 0$ که $G_\mu(x) \neq 0$ داشته باشیم $v(g_\mu(a)) = 0$. آنگاه (g, a) در پیکربندیِ σ–هنسلی است و در آن $\gamma(g, a) > 0$.

ملاحظه ۱۳۹. فرض کنید (K, k, Γ, σ) انقباضی و σ–هنسلی باشد. آنگاه $(k, \bar{\sigma})$ بسته‌ی تفاضلیِ خطی [64] است؛ بدین معنی که برای هر $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in k$ نه همه صفر، معادله‌ی $1 + \alpha_0 X + \alpha_1 \sigma(X) + \ldots + \alpha_n \sigma^n(X)$ در $(k, \bar{\sigma})$ پاسخ دارد.

[63] σ-Henselian configuration
[64] linearly difference closed

اثبات. فرض کنید $\mathcal{K}$ میدانی σ–هنسلی باشد و $\alpha_۰$، ...، α_n در k نه همه صفر باشند. بگیرید

$$G(x) = ۱ + a_۰ x + \ldots + a_n \sigma^n(x)$$

که در آن همه‌ی a_i ها در K اند و به گونه‌ای گرفته شده اند که

$$\begin{cases} a_i = ۰ & \alpha_i = ۰ \\ v(a_i) = ۰ \text{ و } \operatorname{res}(a_i) = \alpha_i & \alpha_i \neq ۰ \end{cases}$$

معلوم است که $(G, ۰)$ در ترکیب بندیِ σ- هنسلی است و $\gamma(G, ۰) = ۰$. این یک $a \in K$ به دست می‌دهد که $v(a) = ۰$ و $G(a) = ۰$. بنابراین $\operatorname{res}(a)$ پاسخی است برای

$$۱ + \alpha_۰ x + \ldots + \alpha_n \bar{\sigma}^n(x) = ۰.$$

□

لم ۱۴۰ ([۱۱]). فرض کنید $(k, \bar{\sigma})$ بسته‌ی خطیِ تفاضلی باشد و (g, a) در پیکربندیِ σ- هنسلی باشد. آنگاه یک $b \in K$ هست که

۱. $v(b - a) \geq \gamma(g, a)$ و $v(g(b)) > v(g(a))$؛

۲. یا $g(b) = ۰$ یا (g, b) در پیکربندیِ σ- هنسلی است.

نمادگذاری ۱۴۱. با $T_۰$ تئوریِ میدان های تفاضلی ِ انقباضیِ σ–هنسلی با مشخصه‌ی صفر را (در زبانِ $L_{k,\Gamma,\sigma}$) و با $T_۰^{ac}$ تئوریِ میدان های تفاضلیِ م.ز. را (در زبانِ $L_{k,\Gamma,\sigma} \cup \{ac\}$) می نمایانیم.

حقیقت ۱۴۲ (درهان). ۱. تئوریِ $T_۰^{ac}$ سورهای بخشِ میدانِ K را حذف می کند.

۲. درهر مدلِ $\mathcal{K} = (K, \Gamma_K, k_K)$، k_K ثابت‌نشانده است و ساختار تولید شده، ساختار یک میدان تفاضلی است. همین سان، Γ_K نیز ثابت نشانده و یک $\mathbb{Z}[\sigma]$ مدولِ محض است. هم چنین k و Γ بر هم عمودند.

۳. بگذارید $\mathcal{K}$ و $\mathcal{L}$ دو مدل از $T_۰^{ac}$ باشند. آنگاه

(آ) $\mathcal{K} \equiv \mathcal{L}$ اگر و تنها اگر $k_K \equiv k_L$ به عنوان میدانهای تفاضلی، و $\Gamma_K \equiv \Gamma_L$ به عنوان $\mathbb{Z}[\sigma]$ - مدولهای مرتب.

(ب) فرض کنید $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$. آنگاه $\mathcal{K} \preceq \mathcal{L}$ اگر و تنها اگر $k_K \preceq k_L$ و $\Gamma_K \preceq \Gamma_L$.

۴. شماره‌ی پیشین برای دو مدل از $T_۰$.

نمادگذاری ۱۴۳. با $\mathrm{VFA}_۰$ تئوری برگرفته از $T_۰^{ac}$ به همراهِ اصولی را می‌نامیم که بیانگرند که $(k, \bar{\sigma}) \models \mathrm{ACFA}_۰$ و $(\Gamma, \sigma) \models \mathrm{IncDODG}$. با $\mathrm{IncVFA}_۰$ تئوری ساختارهای $\mathcal{K} = (K, k, \Gamma)$ را (در زبانِ $L_{k,\Gamma,\sigma} \cup \{ac\}$) نشان می دهیم که در آن (K, k_K, Γ_K) میدان تفاضلیِ انقباضیِ م. ز. باشد با مشخصه‌ی صفر، $(k, \bar{\sigma})$ یک میدانِ تفاضلی شاملِ k_K باشد و $(\Gamma, \sigma_\Gamma) \models \mathrm{IncODG}$ به عنوانِ یک زیرگروهِ تفاضلی Γ_K را دربربگیرد. (یعنی نیاز نباشد که res و v پوشا باشند).

حقیقت ۱۴۴. $\mathrm{VFA}_\circ$ همراهِ مدلیِ [۶۵] $\mathrm{IncVFA}_\circ$ در زبانِ میدان های تفاضلی ارزیابی م.ز. است. این نتیجه هم چنان اگر هر دوی $\mathrm{VFA}_\circ$ و $\mathrm{IncVFA}_\circ$ به زبانِ میدان های ارزیابیِ تفاضلی محدود شده باشند نیز برقرار می ماند.

$q = p^n$ بگیرید $\mathcal{K}_q = (K_q, \Gamma, k, \phi_q)$ که $\mathrm{ACVF}_{p,p} \models (K_q, \Gamma, k)$ و ϕ_q اتومرفیسمِ فروبینیوس، $x \mapsto x^q$ است.

حقیقت ۱۴۵ (هراشوفسکی)**.** فرض کنید ϕ جمله‌ای در زبانِ میدان های تفاضلیِ م.ز. باشد. آنگاه شماره‌های زیر معادلند:

۱. $\mathrm{VFA}_\circ \vdash \phi$

۲. برای همه‌ی p های اولِ به اندازه بزرگ $\mathcal{K}_p \models \phi$.

قضیه ۱۴۶. بگذارید $\mathcal{K} = (K, k, \Gamma)$ یک میدان تفاضلیِ ارزیابیِ م.ز. با مشخصه‌ی پیمانه‌ایِ صفر باشد. فرض کنید $T = \mathrm{Th}(\mathcal{K})$ سورهای K را حذف می کند و هم چنین هردوی میدانِ پیمانه‌ها، k (به عنوان یک میدان تفاضلی)، و گروهِ ارزشها، Γ (به عنوانِ یک گروه تفاضلیِ مرتب)، اِن‌تی‌پی‌دو باشند. آنگاه $\mathcal{K}$ اِن‌تی‌پی‌دو است.

لم ۱۴۷. فرض کنید $\phi(x,y)$ یک فرمولِ بی سور در زبانِ $L_{k,\Gamma,\sigma} \cup \{ac\}$ باشد. آنگاه این فرمول در هر میدانِ تفاضلیِ ارزیابیِ م.ز. نیپ [۶۶] است.

اثبات. می‌توان $\phi(x,y)$ را به گونه‌ی $\psi(x, \sigma(x), \ldots, \sigma^n(x), y, \sigma(y), \ldots, \sigma^n(y))$ انگاشت که در آن $\psi(x_\circ, x_1, \ldots, x_n, y_\circ, y_1, \ldots, y_n)$ فرمولِ بی سوری در زبانِ میدان های ارزیابی، $L_{k,\Gamma} \cup \{ac\}$ است.

ادّعا ۱۴۸. هر میدان ارزیابیِ م.ز. با مشخصه‌ی پیمانه‌ای صفر را می‌توان در میدان ارزیابیِ بسته‌ی جبریِ م.ز. نشانید.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{K} = (K, k, \Gamma)$ یک میدان ارزیابیِ م.ز. با مشخصه‌ی پیمانه‌ایِ صفر باشد. نگاشتِ مؤلفه‌ی زاویه‌ای، بکتائی به هنسلانده‌ی $\mathcal{K}$ گسترده می‌شود و از این رو فرض می‌کنیم خودِ $\mathcal{K}$ هنسلی است. از قضیه‌ی پاس (حقیقتِ ۱۳۱) برمی آید که $\mathcal{K} \equiv (k(\Gamma), k, \sigma)$ که ساختار سمت راست این هم ارزی، با نگاشت مولفه‌ی زاویه‌ای استاندارد در نظر گرفته شده است. هر میدان از سریهای هان [۶۷] در یک میدان بسته‌ی جبری از سریهای هان می نشیند که این، نتیجه را به دست می‌دهد. $\square$

بنا به نتیجه‌ای از دلُن [۶۸] تئوریِ $\mathrm{ACVF}_{\circ,\circ}$ در زبانِ بهمراه مؤلفه‌ی زاویه‌ای، نیپ است. بنابراین ادعای بالا می‌دهد که $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ در هر میدانِ ارزیابیِ م.ز. با مشخصه‌ی پیمانه‌ایِ صفر نیپ است. حال فرض کنید $(a_i)_{i\in\omega}$ و $(b_s)_{s\subseteq\omega}$ دنباله‌هائی در یک میدان ارزیابیِ م.ز. باشند که $\mathcal{K} \models \phi(a_i, b_s) \Leftrightarrow i \in s$. آنگاه اگر بگیریم $\bar{a}_i = (a_i, \sigma(a_i), \ldots, \sigma^n(a_i))$ و $\bar{b}_s = (b_s, \sigma(b_s), \ldots, \sigma^n(b_s))$ می گیریم: $\mathcal{K} \models \psi(\bar{a}_i, \bar{b}_s) \Leftrightarrow i \in s$ که این ناقضِ نیپ بودنِ $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ است. $\square$

---

[۶۵] model companion
[۶۶] NIP
[۶۷] Hahn series
[۶۸] Delon

۲۴ چند لمِ کمکی برای گسترش آرایه‌ها

لم ۱۴۹. فرض کنید D یک مجموعه‌ی تهی‌تعریف شدنیِ ثابت‌نشانده چنان باشد که D_{ind}، ساختارِ ایجادشده بر آن، [۶۹] اِن‌تی‌پی‌دو است. فرض کنید $\bar{b} \subseteq D$ با $|\bar{b}| \leq \lambda$ داده شده باشد. فرض کنید $(\bar{c}_i)_{i\in\kappa}$ آرایه‌ای با سطرهای دوبه‌دوبازنشناختنی روی C باشد و $\bar{c}_i = (c_{ij})_{j\in\omega}$. اگر $\kappa \geq (\lambda + |T|^+)$، آنگاه یک $i \in \kappa$ و یک $(\bar{c}'_i)_{i\in k}$ هستند که

- $\bar{c}' \equiv_{c_{i\circ}C} \bar{c}_i$.
- $\bar{c}'$ روی $C\bar{b}$ بازنشناختنی است.

اثبات. بگذارید $p_i(\bar{x}, c_{i\circ}) = \mathrm{tp}(\bar{b}/c_{i\circ}C)$. ادعا می‌کنیم که برای یک $i \in k$، $\bigcup_{j\in\omega} p_i(\bar{x}, c_{ij})$ سازگار است. فرض کنید که نباشد؛ آنگاه با فشردگی و بازناشناختگی، برای هر $i \in k$ یک $\phi_i(x_i, c_{i\circ}d_i) \in p_i$ (با $x_i \subseteq \bar{x}$ – متناهی)، با $d_i \in C$ و $k_i \in \omega$ داریم که $\{\phi_i(x_i, c_{ij}d_i)\}_{j\in\omega}$، k_i ناسازگار است. از آن جا که D ثابت نشانده است، برای هر i یک $\psi_i(x_i, e_{i\circ})$ با $e_{i\circ} \in D$ چنان هست که

$$\psi_i(x_i, e_{i\circ}) \cap D = \phi_i(x_i, c_{i\circ}d_i) \cap D.$$

از آن جا که تایپِ $c_{i\circ}d_i$ دارد می گوید که یک عنصرِ $e_{i\circ}$ با چنین ویژگی ای هست، بنا به بازناشناختگیِ سطرهای C، برای همه‌ی i, j ها می‌توان $e_{ij} \in D$ چنان یافت که

$$\psi_i(x_i, e_{ij}) \cap D = \phi_i(x_i, c_{ij}d_i) \cap D$$

از آن جا که k به اندازه بزرگ انتخاب شده است، با دور ریختن برخی از سطرها، فرض می‌کنیم

$$\psi_i = \psi, x_i = x, k_i = k$$

حال داریم

۱. برای هر i، $\{\psi(x, e_{ij} \wedge D(x)\}_{j\in\omega}$، k ناسازگار است (زیرا $\{\phi_i(x_i, c_{ij}d_j)\}_{j\in\omega}$، k– ناسازگار است).

۲. $\{\psi(x, e_i f(i)) \wedge D(x)\}$ برای هر $f : k \to \omega$ سازگار است ($\bar{b}$ برای $f(i) = ۰$ شاهد است و برای f – دلخواه، از دو به دو بازناشناختگیِ سطرها بدست می آید).

و این متناقض با اِن‌تی‌پی‌دو بودنِ D است.

حال بگذارید i همانی باشد که ادعا به دست می‌دهد. آنگاه بنا به قسمتِ دوی لمِ ۱۵۲، $\bar{c}' \equiv_{c_{i\circ}C} \bar{c}_i$ چنان که $\bar{c}'$ روی $\bar{b}C$ بازنشناختنی باشد، یافت می‌شود. □

لم ۱۵۰. بگذارید $(c_{ij})_{i,j\in\omega}$ یک آرایه‌ی بسیار بازنشناختنی، و آن گونه باشد که $(\bar{c}_i)_{i\in\omega}$ روی a بازنشناختنی است؛ و فرض کنید b داده شده باشد. آنگاه می‌توان b_{ij} چنانِ یافت که $(b_{ij}c_{ij})_{i,j\in\omega}$ یک آرایه‌ی بسیار بازنشناختنی باشد، برای هر i, j، $bc_{\circ\circ} \equiv b_{ij}c_{ij}$ و $(\bar{b}_i\bar{c}_i)_{i\in\omega}$ روی a بازنشناختنی باشد.

اثبات. بگیرید $b_{\circ\circ} = b$ و بگذارید b_{ij} چنان باشد که $b_{ij}c_{ij} \equiv b_{\circ\circ}c_{\circ\circ}$. بنا به قسمت دومِ لمِ ۱۵۲ و فشردگی، با اعمالِ یک اتومرفیسم فرض می‌کنیم که $(\bar{b}_i\bar{c}_i)_{i\in\omega}$ دو به دو بازنشناختنیند. بنا به رمزی، فشردگی و با اعمالِ اتومرفیسم های روی a می‌توان فرض می کرد که $(\bar{b}_i\bar{c}_i)$ بعلاوه روی a بازنشناختنی است. □

تعریف ۱۵۱. تایپِ (جزئیِ) $p(x)$ روی A را اِن‌تی‌پی‌دو شناسا [۷۰] می‌نامیم اگر یک $\Phi \subseteq p$، بسته زیرِ عطفِ

[۶۹]ساختاری که از اشتراکِ مجموعه‌های تعریف‌شدنی در توان‌های مدلِ هیولا با توان‌های D به دست می‌آید.

[۷۰]NTP2-determined

فرمولها، چنان باشد که $\Phi(x) \vdash p(x)$ و برای هر $\phi(x,a) \in \Phi$ فرمولِ $\phi(x,y)$ اِن‌تی‌پی‌دو باشد.

لم ۱۵۲. ۱. بگذارید C یک مجموعه‌ی کوچک، $\bar{a} = (a_i)_{i\in\omega}$ یک دنباله‌ی C–بازنشناختنی، b داده شده، و $p(x,a_\circ) = \mathrm{tp}(b/a_\circ C)$ باشند. فرض کنید $\bigcup_{i\in\omega} p(x,a_i)$ سازگار باشد. آنگاه یک $\bar{a}'$ بازنشناختنی روی bC، چنان هست که $\bar{a}' \equiv_{a_\circ C} \bar{a}$.

۲. بگذارید C یک مجموعه‌ی کوچک باشد و $(a_{\alpha i})_{\alpha<n, i<\omega}$ یک آرایه با $n < \omega$. آنگاه برای هر $\Delta \in L(C)$ که متناهی است و هر $N < \omega$ دنباله‌های Δ–دوبه‌دوبازنشناختنیِ $(a_{\alpha,i_{\alpha\circ}}, \ldots, a_{\alpha,i_{\alpha N}}) \subseteq \bar{a}_\alpha$ را می‌توان داشت که $i_{\alpha\circ} < \ldots < i_{\alpha N} \in \omega$ و $\alpha < n$. (در هر سطر n عنصر می‌توان یافت که کنار هم گذاشته‌شان چنین دنباله‌ای بدهد.)

۳. فرض کنید که $(\bar{a}_i)_{i\in\kappa}$ و یک مجموعه‌ی کوچکِ C به گونه‌ای داده شده اند که $\bar{a}_i$ برای همه‌ی $i < \kappa$ روی $\bar{a}_{<i}(a_{j\circ})_{j>i}C$ بازنشناختنی است. آنگاه یک آرایه‌ی $(\bar{a}'_i)_{i\in\kappa}$ هست که $\bar{a}'_i \equiv_{a_{i\circ}C} \bar{a}_i$ و برای همه‌ی i ها، $\bar{a}'_i$ روی $\bar{a}'_{\neq i}C$ بازنشناختنی است.

اثبات. ۱. با اعمال یک اتومرفیسم کافی است یک $b' \equiv_{a_\circ C} b$ پیدا شود که $\bar{a}$ روی $b'C$ بازنشناختنی است. بگذراید Δ یک مجموعه‌ی متناهی از فرمولهای روی C باشد. فرض کنید $b^+ \models \bigcup_{i\in\omega} p(x,a_i)$. بنا به رمزی، زیردنباله‌ی نامتناهیِ $\bar{a}^+$ از $\bar{a}$ هست که روی b^+، Δ–بازنشناختنی است. بگذارید σ یک C–اتومرفیسم باشد که $\bar{a}^+$ را به $\bar{a}$ می فرستد. آنگاه $\bar{a}$ روی $\sigma(b^+)$، Δ بازناشناختنی است و $b \equiv_{a_\circ C} \sigma(b^+)$. حال b' با فشردگی یافت می‌شود.

۲. بنا به قضیه‌ی رمزیِ با داده‌های متناهی، اعداد طبیعیِ $(N_\alpha)_{\alpha<n}$ هستند آنچنانکه برای هر $\alpha < n$ و هر مجموعه‌ی A با اندازه‌ی $\sum_{\beta<\alpha} N_\alpha + (n-1-\alpha) \times N$ هر دنباله به طول N_α زیردنباله‌ای از طولِ N دارد که روی A، Δ–بازنشناختنی است.

بگذارید $\bar{a}^+_\alpha = (a_{\alpha i})_{i<N_\alpha}$. با استقرای برعکس و بنا و انتخابِ N_α ها می‌توان $\bar{a}'_\alpha$ ای چنان یافت که

- $\bar{a}'_\alpha$ زیردنباله‌ای از $\bar{a}^+_\alpha$ است.
- $|\bar{a}'_\alpha| = N$.
- $\bar{a}'_\alpha$ روی $\bar{a}^+_{<\alpha}\bar{a}'_{>\alpha}$، Δ بازنشناختنی است.

اکنون، $\bar{a}'_\circ, \ldots, \bar{a}'_{n-1}$ آن گونه‌اند که می‌خواستیم.

۳. بنا به فشردگی کافی است حکم برای k های متناهی ثابت شود. فرض کنید $\Delta \in L(C)$ متناهی و $N \in \omega$ دلخواه باشند. بنا به ۲، می‌توان دنباله‌های Δ–دو به دو بازنشناختنیِ $\bar{a}^+_\alpha = (a_{\alpha,i_{\alpha\circ}}, \ldots, a_{\alpha,i_{\alpha n}}) \subseteq \bar{a}_\alpha$ را برای $\alpha \in k$ یافت. از فرض (و بنا به نکته‌ی بالا) برمی آید که

$$a_{\circ,i_{\circ\circ}} a_{1,i_{1\circ}} \ldots a_{k-1,i_{(k-1,\circ)}} \equiv_C a_{\circ\circ} a_{1\circ} \ldots, a_{(k-1)\circ}.$$

بگذارید σ اتومرفیسمی باشد که سمتِ چپ (ِ بالا) را به سمت راست می برد. داریم

- $\sigma(\bar{a}^+_\circ)$، ...، $\sigma(\bar{a}^+_{k-1})$ دو به دو Δ بازنشناختنیند.
- بنا به بازنشناختگی،

$$a_{\alpha,i_{\alpha\circ}}, \ldots, a_{\alpha,i_{\alpha N}} \equiv_C a_{\alpha\circ} \ldots a_{\alpha N}$$

کاین بهمراهِ $\sigma(a_{\alpha,i_{\alpha\circ}}) = a_{\alpha\circ}$ می رساند که برای هر α، $\sigma(\bar{a}^+_\alpha) \equiv_{a_{\alpha\circ}C} (a_{\alpha_i})_{i\leq N}$.

حال به کمکِ فشردگی، $\bar{a}'_0, \ldots, \bar{a}'_{k-1}$ را آنگونه که می‌خواهیم می یابیم.

□

لم ۱۵۳ (لم گسترش آرایه). بگذارید D یک مجموعه‌ی تهی‌تعریف‌شدنیِ ثابت‌نشانده باشد و فرض کنید D_{ind} اِن‌تی‌پی‌دو است. هم چنین فرض کنید

- دنباله‌ی $(\bar{c}_i)_{i\in\omega}$ روی a بازنشناختنی [۷۲۷۱] است.
- $(c_{ij})_{i,j\in\omega}$ یک آرایه‌ی بسیار بازنشناختنی است.

فرض کنید یک $b \subseteq D$ ی کوچک داده شده باشد. آنگاه می‌توان $(c^*_{ij})_{i,j\in\omega}$ و $(b^*_{ij})_{i,j\in\omega}$ هائی چنان یافت که

۱. $(\bar{b}^*_i\bar{c}^*_i)_{i\in\omega}$ روی a بازنشناختنی است.

۲. $(\bar{b}^*_i\bar{c}^*_i)_{i\in\omega}$ دو به دو بازنشناختنی است.

۳. برای همه‌ی $i \in \omega$ ها، $\bar{c}_i \equiv_{c_{i0}} \bar{c}^*_i$ (پس بویژه $c^*_{i0} = c_{i0}$)

۴. $abc_{00} \equiv ab^*_{00}c^*_{00}$.

بویژه $(b^*_{ij}c^*_{ij})_{i,j\in\omega}$ آرایه‌ای بسیار بازنشناختنی است.

اثبات. شکلِ ۲۴ شاید در آسان‌شدن فهم اثبات یاری کند. بنا به فشردگی، کافی است حکم را برای b ی متناهی ثابت کنیم. نخست بنا به بازنشناختگی، رمزی و اعمالِ اتومرفیسمها روی a می‌توان b_i چنان یافت که $ab_i\bar{c}_i \equiv ab\bar{c}_0$ و $(b_i\bar{c}_i)_{i\in\omega}$ روی a بازنشناختنی است. دوباره با کمکِ فشردگی، بازنشناختگی و اعمالِ اتومرفیسمهای روی a کافی است $\bar{c}^*_{<n}$ و $\bar{b}^*_{<n}$ هائی را بیابیم که ۲ و ۳ (ی بالا) و $'$۴ (در پائین) را برآورند:

$'$۴. برای همه‌ی $k < n$، $abc_{00} \equiv ab^*_{k0}c^*_{k0}$.

پس $n \in \omega$ را برجا داشته فرض کنید

$$I = I_0 + I_1 + \ldots + I_n = |T|^+ \ldots + |T|^{+n}$$

(که در بالا، برای هر کاردینالِ k، با $(k^+)^n$، n اُمین تالیِ k را نمایانده‌ایم). به کمکِ فشردگی، دنباله‌مان را به $(b_i\bar{c}_i)_{i\in I}$ با همان تایپِ اهغن‌موستوفسکی می گسترانیم.

با استقرای وارونه روی $k < n$ می‌توان i_k، $\bar{c}^+_k$ و $\bar{b}^+_k$ هائی بیابیم آنچنانکه

۱. $i_k \in I_k$

۲. $\bar{c}_k \equiv_{c_{i_k 0}} \bar{c}_{i_k}$ (بویژه $c^+_{k0} = c_{i_k 0}$).

۳. $\bar{c}_{\in I_{<k}}\bar{c}_k\bar{c}^+_{k+1}\ldots\bar{c}^+_{n-1} \equiv \bar{c}_{\in I_{<k}}\bar{c}_{i_k}\bar{c}_{i_{k+1}}\ldots\bar{c}_{i_{n-1}}$.

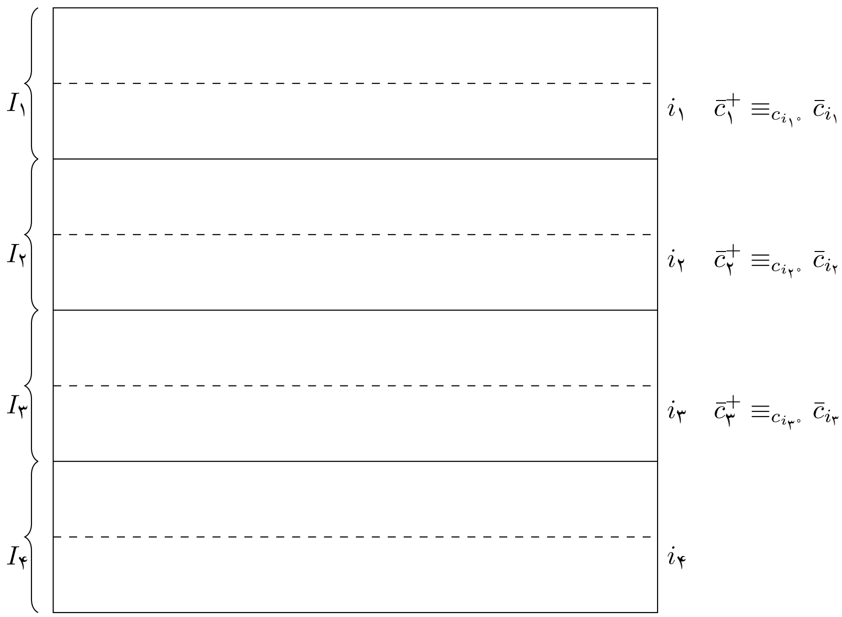
۴. $b^+_{k0} = b_{i_k}$ و $\bar{b}^+_k \subseteq D$.

۵. $(b^+_{kj}c^+_{kj})_{j\in\omega}$ روی $\bar{b}^+_{>k}\bar{c}^+_{>k}b_{\in I_{<k}}\bar{c}_{\in I_{<k}}$ بازنشناختنی است.

---

[۷۱] indiscernible

[۷۲] واژه‌های «بازنشناختنی» یا »«ناتمیز» را پیشنهاد می کنم.



شکل ۲: لمِ ۱۵۳

در گامِ k ام می گیریم $C = \bar{c}^+_{>k}\bar{c}_{\in I_{<k}}$ و $\bar{b} = \bar{b}^+_{>k} b_{\in I_{<k}}$. داریم $|\bar{b}| \le |T|^{+k}$، $\bar{b} \subseteq D$ و $(c_i)_{i\in I_k}$ روی C دو به دو بازنشناختنیند (برای $k+۱$ بنا به ۳، و روی $(\bar{c}_i)_{i\in I}$ بنا به فرض).

از آنجا که $I_k = |T|^{+(k+۱)}$، از لمِ ۱۴۹ چنین برمی‌آید که یک $i_k \in I_k$ و یک $\bar{c}'_k$ بازنشناختنی روی $\bar{b}C$ هستند آنچنان که $\bar{c}'_k \equiv_{c_{i_k 0}} \bar{c}_{i_k}$. بنا به رمزی و فشردگی و با کمکِ $\bar{b}C$–اتومرفسیمها، می‌توان یک دنباله‌ی $\bar{b}C$ بازنشناختنیِ $(b^+_{kj}c^+_{kj})_{j\in\omega}$ آنچنان که $b^+_{k0}c^+_{k0} = b'_{k0}c'_{k0}$ و $\bar{c}^+_k \equiv_{\bar{b}C} \bar{c}'_k$ یافت. اکنون شماره‌های ۲ و۳ از ۳ برای $k+۱$ و از این که $\bar{c}^+_k \equiv \bar{c}'_k \equiv \bar{c}_{i_k}$ به دست می آیند. شماره‌های ۱ و ۴و ۵ نیز بروشنی در حین ساخت برآورده شده‌اند.

بنا به لمِ ۱۵۲ (قسمتِ ۳) و شماره‌ی ۵ در بالا، می‌توان دنباله‌های $(b^{++}_{kj}c^{++}_{kj})_{j\in\omega}$ را برای $k < n$ یافت که دو به دو بازنشناختنی و چنان باشند که

$$\bar{c}^{++}_k\bar{b}^{++}_k \equiv_{b^+_{k0}c^+_{k0}} \bar{c}^+_k\bar{b}^+_k.$$

سرآخر، بگذارید σ، a–اتومرفیسمی باشد که $b^+_{<n}\bar{c}_{<n}$ را به $b_{i<n}\bar{c}_{i<n}$ می‌فرستد و برای $k < n$ ها بگیرید

$$\bar{b}^*_k = \sigma(\bar{b}^{++}_k), \bar{c}^*_k = \sigma(\bar{c}^{++}_k).$$

داریم

- $(\bar{b}^*_k\bar{c}^*_k)_{k<n}$ دو به دو بازنشناختنیند (از آنجا که $(\bar{b}^{++}_k\bar{c}^{++}_l)_{k<n}$ اینگونه‌اند) و
- $\bar{c}^*_k \equiv_{c_{k0}} \bar{c}_k$ (از آنجا که $\bar{c}^{++}_k \equiv_{c^+_{k0}} \bar{c}^+_k$ و $\bar{c}^+_k \equiv_{c_{i_k 0}} \bar{c}_{i_k}$ و $c^+_{k0} = c_{i_k 0}$ و σ اتومرفیسم است.

- $ab^*_{k_\circ}c^*_{k_\circ} \equiv abc_{\circ\circ}$ برای همه‌ی $k < n$؛ از آن جا که بنا به ساخت $b^*_{k_\circ}c^*_{k_\circ} = b_kc_{k_\circ}$ و $ab_kc_{k_\circ} \equiv abc_{\circ\circ}$.

$\square$

لم ۱۵۴. بگذارید $(a_{ij})_{i,j\in\omega}$ یک آرایه‌ی بسیاربازنشناختنی، $\phi(x,y)$ یک فرمول و c چنان باشند که $c \models \{\phi(x,a_{i_\circ})\}$ و بعلاوه فرض کنید که دنباله‌ی سطرهای $(\bar{a}_i)_{i\in\omega}$ روی c بازنشناختنی باشد. فرض کنید $p(x,a_{\circ\circ}) = \mathrm{tp}(c/a_{\circ\circ})$ اِن‌تی‌پی‌دو شناسا باشد. آنگاه $\{\phi(x,a_{\circ j})\}_{j\in\omega}$ سازگار است.

لم ۱۵۵. فرمولِ $\phi(x,y)$ در یک تئوری، تی‌پی‌دو دارد اگر و تنها اگر یک آرایه‌ی بسیار بازنشناختنیِ $(a_{ij})_{i,j\in\omega}$ شاهدِ آن، و یک $c \models \{\phi(x,a_{i_\circ})\}$ چنان باشند که دنباله‌ی سطرهای $(\bar{a}_i)_{i\in\omega}$ روی c بازنشناختنی باشد.

لم ۱۵۶. فرض کنید $\phi(x,y)$ یک فرمولِ بی‌سور در زبانِ $L_{k,\Gamma,\sigma} \cup \{ac\}$ باشد.آنگاه این فرمول در هر میدانِ ارزیابیِ تفاضلیِ م.ز. با مشخصه‌ی پیمانه‌ای صفر، اِن‌آی‌پی است.

۲۵ اثباتِ قضیه‌ی ۱۴۶

بگذارید پیش از اثبات، آن را باردیگر بیان کنیم.

قضیه (بازنویسی قضیه‌ی ۱۴۶). بگذارید $\mathcal{K} = (K,k,\Gamma)$ یک میدان تفاضلیِ ارزیابیِ م.ز. با مشخصه‌ی پیمانه‌ایِ صفر باشد. فرض کنید $T = \mathrm{Th}(\mathcal{K})$ سورهای K را حذف کند و هم چنین هردوی میدان ِ پیمانه‌ها، k (به عنوان یک میدان تفاضلی)، و گروهِ ارزشها، Γ (به عنوان ِ یک گروه تفاضلیِ مرتب)، اِن‌تی‌پی‌دو باشند. آنگاه $\mathcal{K}$ اِن‌تی‌پی‌دو است.

اثباتِ قضیه‌ی ۱۴۶. یک مدلِ هیولای $\mathbb{M} \models T$ را برجا بدارید. فرض کنید فرمولی چون $\phi(x,y)$ تی‌پی‌دو باشد. می‌توانیم فرض کنیم $|x| = ۱$. از آن جا که ساختارهای ایجادشده بر [۷۳] از Γ و k هر دو اِن‌تی‌پی‌دو اند، با ترکیب لم‌های ۱۵۵ و ۱۴۹ فرض می‌کنیم که x متغیری از بخشِ میدان ارزیابیِ K است. فرض کنید $(a_{ij})_{i,j\in\omega}$ آرایه‌ای باشد شاهد بر این که $\phi(x,y)$ تی پی دو دارد و a برآورنده‌ای از ستونِ اول باشد؛ یعنی $a \models \bigwedge_{i\in\omega}\phi(x,a_{i_\circ})$. بنا به لمِ ۱۵۵ فرض می‌توان کرد که

- $(a_{ij})_{i,j\in\omega}$ یک آرایه‌ی بسیار بازنشناختنی [۷۴] است و
- دنباله‌ی سطرهای $(\bar{a}_i)_{i\in\omega}$ دنباله‌ای a–بازنشناختنی است.

در این اثبات، آرایه‌های (a^α_{ij}) را یکی پس از دیگری چنان می‌سازیم که α یک اردینالِ $\omega \leq$ است و a^α_{ij} چندتائیهای شمارائی اند در $\mathbb{M}$ که آغازگرشان $a^\circ_{ij} = a_{ij}$ است و آنچنانند که برای $\alpha < \beta$ یک تجزیه‌ی $(a^\beta_{ij}) = (a^*_{ij}b^*_{ij})$ باشد که

۱. $(a^\beta_{ij})_{i,j\in\omega}$ آرایه‌ای بسیار بازنشناختنی است.

۲. دنباله‌ی سطرهای $(\bar{a}^\beta_i)_{i\in\omega}$، a–بازنشناختنی است.

---
[۷۳] induced structures
[۷۴] strongly indiscernible

۳. برای هر $i \in \omega$ داریم $\bar{a}_i^* \equiv_{a_{i0}^\alpha} \bar{a}_i^\alpha$

از شماره‌ی ۳ در بالا برمی آید که ستون نخست در واقع گسترشی از ستون نخستِ اصلی است؛ به ویژه هم چنان داریم $a \models \bigwedge_{i\in\omega} \phi(x, a_{i0}^\beta)$. هم چنین بنا به شماره‌ی ۳، فرمول‌سطرهای $\{\phi(x, a_{ij}^\beta)\}_{j\in\omega}$ هم چنان ناسازگارند. از پیامد، برای هر β آرایه‌ی (a_{ij}^β) شاهد تی پی دو داشتنِ ϕ است.

با این که تنها ستون اول، $(a_{i0}^\alpha)_{i\in\omega}$، می بایست زیرچندتائیِ[۷۵] $(a_{i0}^\beta)_{i\in\omega}$ باشد، هنگام گذر از (a_{ij}^α) به (a_{ij}^β)، کم و بیش نادقیق خواهیم گفت آن را «گسترانده‌ایم». نظر به این، یک گسترش از آرایه‌ها را **خوب** نامیده‌ایم هرگاه ویژگیهای ۱ تا ۳ ی بالا را داشته باشد. ساخت آرایه‌های بالا در «گامها» خواهد بود. دو نوع گامِ تالی خواهیم داشت: گام‌های کمکی، که در آنها با کمک لمِ ۱۵۰ آرایه‌ی (a_{ij}^α) را برای افزوده شدن پارامترهای تازه، بی نگرانی می گسترانیم؛ و گامهای عمل، که در آنها با کمکِ « لمِ گسترشِ آرایه‌ها»، آن‌ها را هوشمندانه، با چشم برنداشتن از اطلاعاتی که جزئی از $\mathrm{tp}(a/a_{00}^\alpha)$ از بخشهای اِن‌تی‌پی‌دوی Γ و k می‌دهد می گسترانیم. در گامِ پایانی، از لمِ ۱۵۴ برای یک گسترشِ بلافاصله بهره جُسته‌ایم.

اگر آرایه‌های (a_{ij}^α) برای همه‌ی $\alpha < \omega$ به گونه‌ای ساخته شده باشند که برای هر $\alpha < \beta < \omega$ آرایه‌ی (a_{ij}^β) یک گسترشِ خوب از a_{ij}^α باشد، آنگاه می‌توان یک آرایه‌ی (a_{ij}^ω) را چنان یافت که برای هر $i \in \omega$، $a_{i0}^\omega = \bigcup_{\alpha<\omega} a_{i0}^\alpha$ و به گونه‌ای که برای همه‌ی $\alpha < \omega$، (a_{ij}^ω) یک گسترش خوب از (a_{ij}^α) باشد. از آن جا که ویژگی های ۱ تا ۳ در بالا در متغیرهای (x_{ij}^ω) بواقع تایپ تعریف شدنی اند، این از فشردگی نتیجه می‌شود.

۱. برای هر (a_{ij}^α) ی داده شده، یک گسترشِ خوبِ $a_{ij}^{\alpha+1}$ هست که $(a_{00}^{\alpha+1})$ یک زیرساختارِ $\mathcal{K}^{\alpha+1} = (K^{\alpha+1}, k^{\alpha+1}, \Gamma^{\alpha+1})$ را می شُمارد که در آن هر دوی $K^{\alpha+1}$ و $k^{\alpha+1}$ میدان‌های تفاضلی‌اند و $\Gamma^{\alpha+1}$ یک $\mathbb{Z}[\sigma]$ مدول است (بنا به لمِ ۱۵۰).

در ادامه، همواره فرض کرده‌ایم که a_{00}^α همانند آن است که در نتیجه‌ی گامِ اول (در بالا) آمده است. برای این که نمادها آسان تر شود می نویسیم: $a_{00}^\alpha = (K, k, \Gamma)$ و $a_{00}^{\alpha+1} = (K', k', \Gamma')$.

بگذارید $L := K\langle a\rangle$ و $L' = K'\langle a\rangle$؛ یادآرید که $a \models \bigwedge_{i\in\omega} \phi(x, a_{i0})$.

۲. برای (K, k, Γ) ی داده شده، یک گسترشِ خوب چنان هست که $k_{K'} \supseteq k$. (بنا به لمِ ۱۵۰)

۳. برای (K, k, Γ) ی داده شده، یک گسترشِ خوب چنان هست که $\Gamma_{K'} \supseteq \Gamma$. (بنا به لمِ ۱۵۰)

۴. برای (K, k, Γ) ی داده شده، یک گسترشِ خوب چنان هست که $ac(L) \subseteq k'$. (بنا به لمِ ۱۵۳ با گرفتنِ $b = ac(L)$، از آن جا که k بنا به قسمت اولِ لمِ ۱۲۹ ثابت‌نشانده است و فرضِ اِن‌تی‌پی‌دو.)

۵. برای (K, k, Γ) ی داده شده، یک گسترشِ خوب چنان هست که $\Gamma_L \subseteq \Gamma$. (بنا به قسمت اولِ لمِ ۱۲۹ و فرضِ اِن‌تی‌پی‌دو)

با تکرار گام های ۱ تا ۵ و گذر به حد، به یک گسترشِ خوبِ (a_{ij}^ω) می رسیم که (K, k, Γ) از یک میدانِ ارزیابیِ تفاضلیِ م.ز. می آید (یعنی $k = k_K$ و $\Gamma = \Gamma_K$) آن گونه که L/K یک گسترش بلافاصله باشد.

[۷۵] subtuple

۶. از آن جا که $ac(K) \subseteq k_K$ می‌توان قسمت دوم لمِ ۱۲۹ را به کار گرفت و بنابراین $\mathrm{tp}(a/K)$ با بخش بی‌سورش شناخته می‌شود. بنا به لمِ ۱۵۶ هر فرمول بی سور ان‌آی‌پی و بویژه اِن‌تی‌پی‌دو است. پس $\mathrm{tp}(a/K)$ اِن‌تی‌پی‌دو شناسا است. اکنون از لمِ ۱۵۴ می آید که $\{\phi(x, a^{\omega}_{\circ j})\}_{j\in\omega}$ سازگار است. ولی $\{\phi(x, a_{ij})^{\omega}\}_{i,j<\omega}$ یک شاهد بر آن است که $\phi(x, y)$ تی پی دو است—تناقض.

$\square$

۲۶ نموداری از انواع تئوری‌ها

پیشنهاد می‌کنم در تارنمای زیر نموداری از انواع تئوری‌ها را ببینید:
http://forkinganddividing.com

۲۷ واژه‌های پیش‌نهادیِ نویسنده

واژه‌ی ۱. بازنشناختنی به‌جای indiscernible؛ یک دنباله‌ی بازنشناختنی، دنباله‌ای است که عناصرِ آن را از لحاظ نقش و کارکرد، نمی‌توان از هم بازشناخت. هر ویژگی‌ای را که عضوی از این دنباله داشته باشد، سایر اعضانیز دارند. مفهوم آرایه‌های بازنشناختنی نیز به‌جای indiscernible arrays پیشنهاد شده است، تعمیمی از مفهوم دنباله‌های بازنشناختنی است.

واژه‌ی ۲. واژه‌های **ترتیب‌کمینه، تَکْمینه، بسیارکمینه** به‌جای (به‌ترتیب از چپ به راست) order-minimal, o-minimal, strongly minimal؛ ساختارهای تکمینه، آنهائیند که مجموعه‌ی تعریف‌پذیر آن‌ها در بعدِ یک، تنها با علامت ترتیب تعریف‌شدنیند. ساختارهای بسیارکمینه آنهائیند که مجموعه‌های تعریف‌شدنی آنها در بعد یک، تنها با علامت تساوی تعریف‌شدنیند.

واژه‌ی ۳. بخش شدن. عبارتِ «بخش‌شدن روی» را به‌جای divide over پیش‌می‌نهم. یک فرمول روی یک مجموعه وقتی بخش می‌شود که جای‌گزین کردن پارامترهای آن فرمول با اعضای آن مجموعه، یک مجموعه‌ی ناسازگار از فرمول‌ها بدست بدهد. در واقع مجموعه‌ی پارامتر بوسیله‌ی این فرمول به دوبخش تقسیم می‌شود.

واژه‌ی ۴. چَنیدن، فُرکیدن به‌جای واژه‌ی fork؛ واژه‌ی «فُرک» در انگلیسی به معنای چنگال و چنگگ است. در حالت فعلی، معنی این واژه چند قسمت شدن است. مثلاً وقتی می‌گویند جاده از فلان جا فرک می‌شود، the road forks، یعنی چندشاخه می‌شود. بهترین واژه‌ای که می‌تواند این معنا را در فارسی برساند و هم‌چنین شباهت کافی به «چنگال» هم داشته باشد، فعلِ «چَنیدن» است. می‌گوئیم یک فرمول روی یک مجموعه می‌چَنَد هرگاه این فرمول عطفی از فرمول‌هائی را بدهد که هر کدام از آنها روی آن مجموعه بخش می‌شوند. درعین‌حال، واژه‌ی ساختگیِ فرکیدن، این ویژگیِ مثبت را دارد که ما را به واژگانِ فنی بافتار نزدیک نگه می‌دارد.

واژه‌ی ۵. برخی دیگر از دیگر واژه‌های پیشنهادیِ به‌کاررفته در این نوشتار را برمی‌شماریم: سادگی، لاسکار ناوردائی، کشسانی، تئوری‌های ثابت و ثابت‌نشاندگی، بسیاربازنشناختنی، دوبه‌دوبازنشناختنی، تجزیه‌ی سلولی، میدان‌های تفاضلیِ ارزیابیِ م.ز.، شرط زنجیری، ناوردائی اکید، وارث و شریک‌اِرث، مدلِ هیولا، شاهد و پایه‌ی گسترش، وزن و بار.

References

[1] D. Marker, *Model Theory : An Introduction*, ser. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2002. [Online]. Available: http://books.google.de/books?id=QieAHk--GCcC

[2] K. Tent and M. Ziegler, *A Course in Model Theory*, ser. Lecture Notes in Logic. Cambridge University Press, 2012. [Online]. Available: https://books.google.de/books?id=D9sClsdErEsC

[3] H. Adler, "Introduction to theories without the independence property." [Online]. Available: www.logic.univie.ac.at/~adler/docs/nip.pdf

[4] Z. Chatzidakis and E. Hrushovski, "Model theory of difference fields," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 351, no. 8, pp. pp. 2997–3071, 1999. [Online]. Available: http://www.jstor.org/stable/118013

[5] A. Chernikov and M. Hils, "Valued difference fields and ntp2." [Online]. Available: arXiv:1208.1341

[6] K. Pal, "Multiplicative valued difference fields," *Journal of Symbolic Logic*, vol. 77, 2012. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.2178/jsl/1333566637

[7] A. Engler and A. Prestel, *Valued Fields*, ser. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2005. [Online]. Available: http://books.google.de/books?id=nnlQbeT7zMoC

[8] D. Macpherson, "Model theory of valued fields." [Online]. Available: https://www1.maths.leeds.ac.uk/Pure/staff/macpherson/modnetval4.pdf

[9] A. Robinson, *Complete Theories*, ser. Studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland Publishing Company, 1977. [Online]. Available: https://books.google.de/books?id=O15iuAAACAAJ

[10] J. Pas, "Uniform p-adic cell decomposition and local zeta functions." *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 399, pp. 137–172, 1989. [Online]. Available: http://eudml.org/doc/153157

[11] S. Azgin, "Valued fields with contractive automorphism and kaplansky fields," *Journal of Algebra*, vol. 324, no. 10, pp. 2757 – 2785, 2010. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869310003765

نمایه