دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی‌تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (منطق)

موضوع:

فضاهای متریک مخروطی و شبه‌متریک از دیدگاه نظریه دامنه

تهیه‌کننده:

محسن خانی

استادان راهنما:

جناب آقای دکتر مسعود پورمهدیان

جناب آقای دکتر فرهاد رحمتی

استاد مشاور:

جناب آقای دکتر فرزاد دیده‌ور

تابستان ۱۳۸۸

چکیده

پیدا کردن مدل محاسباتی برای برخی ساختارهای ریاضی چون فضاهای متریک، فضاهای باناخ و فضاهای اندازه یکی از موضوعات مهم در علوم کامپیوتر نظری به شمار می‌آید. دراین پایان‌نامه در پی معرفی یک دامنه به عنوان یک مدل محاسباتی مناسب برای فضاهای متریک مخروطی هستیم. دامنه‌ای که ویژگی‌های نظریه ترتیبی‌اش تا حد زیادی به ویژگی‌های توپولوژیک فضای متریک مخروطی یادشده وابسته است. لکن پیش‌ازآن، مجموعه مرتب جزئی گوی‌های فرمال را برای فضاهای متریک و شبه‌متریک معرفی و محاسبه‌پذیری آن‌ها(فضاهای متریک و شبه متریک و دامنه گوی‌های فرمالشان) را مطالعه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: نظریه دامنه[۱]، دامنه گوی‌های فرمال[۲]، محاسبه‌پذیری[۳]، فضاهای متریک مخروطی[۴]، فضاهای شبه‌متریک[۵].

---

۱ Domain theory
۲ The domain of formal balls
۳ Computability
۴ Cone metric spaces
۵ Quasi-metric spaces

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

نظریهٔ دامنه که نخست توسط دانا اسکات[6] در ۱۹۷۰ میلادی معرفی شد، کنون یکی از شاخه‌های مهم ریاضیات و به‌ویژه نظریه ترتیب[7] به شمار می‌آید. دامنه، یک مجموعه مرتب جزئی است که به دلیل دربرگرفتن مفاهیم تقریب و اعمال بازگشتی برای محاسبه نقطه ثابت، در علوم رایانه نظری جایگاه انکارناپذیری یافته است.

چنان‌که می‌دانیم، اعداد طبیعی و جمع و ضرب آن‌ها با الگوریتم‌های رایانه‌ای سازگارند؛ به‌سانی که برخی زیرمجموعه های اعداد طبیعی باکمک الگوریتم‌ها ساخته می‌شود. لکن در مورد اعداد حقیقی وضع به‌گونه دگر است. الگوریتم‌های رایانه‌ای شمارا و اعداد حقیقی ناشمارایند؛ زین‌روی، اعداد حقیقی نمی‌توانند با الگوریتم‌های رایانه ای تولید شوند. ولی می‌شود با به کارگیری ماشین‌های تورینگ ویژه‌ای به اعداد حقیقی با هر تقریب دل‌خواهی نزدیک شد. این امر موضوع آنالیز محاسباتی است که جزئیات آن را می‌توان در [۲۱] و [۱۹] جست‌وجو کرد.

وانگهی عدالت در [۱۰] با به کارگیری نظریه دامنه، یک مدل محاسباتی کارآمد برای اعداد حقیقی معرفی می‌کند که درآن بازه‌های با ابتدا و انتهای گویا نقش اعداد حقیقی ناشمارا را بر عهده می‌گیرند. وی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را با دامنه IR می نمایاند و ویژگی های محاسباتی اعدادحقیقی را به ویژگی‌های محاسباتی دامنه IR گره می‌زند.

---

[6] Dana Scott

[7] order theory

با این همه پرسش دگری هنوز خودنمائی می‌کند. آیا می‌توان دگر ساختارهای ریاضی چون فضاهای توپولوژیک، متریک، شبه‌متریک و باناخ را وارد علوم رایانه نمود؟ با ایده فوق، یک راه مناسب برای دست‌یابی بدین هدف، معرفی دامنه‌ای است که با توپولوژی اسکات خود با این فضاها ایزومرف است. وایراخ[۸] و شرایبر[۹] در [۲۳] یک فضای متریک را در یک CPO می نشانند، بلانک[۱۰] در [۳] برای یک فضای متریک کامل یک دامنه معرفی می‌کند و لاوسون[۱۱] در [۱۵] نیز بدین امر می‌پردازد، لکن هیچ‌یک از این مدل‌ها به سادگی و کارایی مدل عدالت و هکمن[۱۲] در [۱۱] نمی‌افتد. آنان برای فضای متریک X یک مجموعه مرتب جزئی به نام مجموعه گوی های‌فرمال معرفی می‌کنند. اگر X کامل باشد این مجموعه یک دامنه است که X با مجموعه نقاط ماکزیمال آن هومئومرف است. اگر X جدائی‌پذیر باشد این دامنه، اُمگا-پیوسته است و می‌توان مفاهیم محاسبه‌پذیری را بر آن جای نهاد. فزون‌براین، با به‌کارگیری قضیه نقطه ثابت تارسکی روی این دامنه، قضیه نقطه ثابت باناخ روی فضای متریک به‌آسانی ثابت می‌شود. و این ایده به راحتی برای فضاهای باناخ نیز قابل استفاده است.

گوی‌های فرمال چنان ایده مناسبی به نظر آمد که پورمهدیان و دیگران آن را در [۲] برای فضاهای شبه‌متریک آزمودند و به نتایج گاه متفاوت اما ارزشمندی دست یافتند. آنان هم‌چنین قضایای نقطه ثابت را برای فضاهای شبه‌متریک با به‌کارگیری قضیه نقطه ثابت تارسکی اثبات کرده‌اند.

بااین‌حال، آنان درباب محاسبه‌پذیری این دامنه، سخنی نگفته‌اند که بخشی از این مطالعه بدان اختصاص یافت. این پایان نامه هم‌چنین ایده گوی‌های فرمال را برای فضاهای متریک مخروطی به کار گرفته است. به دیگر بیان، دراین‌جا برای یک فضای متریک مخروطی کامل یک دامنه معرفی و قضایای نقطه ثابت آن بررسی شده است. (نگارنده هم‌چنین کوشید تا ایده دامنه‌ها را برای اثبات قضایای نقطه

۸ Weihrauch
۹ Schreiber
۱۰ Blanck, J
۱۱ Lawson
۱۲ Heckman

ثابت فضاهای پیمانه‌ای[۱۳] به کارگیرد؛ لکن به دلیل مقتضیات زمان، در این پایان نامه نگنجید و آن را جداگانه در مقاله‌ای خواهد آورد).

در نگارش این اثر کوشیده‌ایم تا مطالب را به ترتیب پیش‌نیاز بیاوریم. در فصل نخست، نظریه دامنه و آنالیز محاسباتی را به اجمال معرفی کرده‌ایم تا با خاطر آسوده آن‌ها را در فصل‌های بعدی به کار گیریم. فصل دوم را به معرفی مدل عدالت و هکمن برای فضاهای متریک و اثبات قضایای نقطه ثابت باناخ با استفاده از قضیه نقطه ثابت تارسکی اختصاص داده‌ایم. مطالب این فصل را می‌توان عموماً در [۱۱] یافت . فصل ۳ به تشریح نتایج پورمهدیان و دیگران (در [۲]) برای فضاهای شبه‌متریک پرداخته است و بخش انتهایی آن مفاهیم محاسبه‌پذیری را روی ابن فضاها و دامنه گویهای فرمالشان، بررسی می‌کند. در فصل ۴ نیز فضای متریک مخروطی را معرفی و سپس فضای گوی‌های فرمال آن را مطالعه می‌کنیم. نتایج این فصل و بخش انتهایی فصل ۳ همگی تازه‌اند و نخستین بار در این پایان نامه می‌آیند. علاوه‌براین، در یک پیوست کوتاه، مفهوم محاسبه‌پذیری را در زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی معرفی کرده‌ایم.

بر خویش لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر پورمهدیان که این‌جانب را با این مضامین دلنشین آشنا کردند تشکر کنم. محبت‌های بی‌دریغ ایشان را در طول شش سالی که دانشجوی دانشگاه امیرکبیر بوده‌ام، نتوانم از یاد برد. هم‌چنین سپاس ویژه من نثار جناب آقای دکتر رحمتی باد؛ که در هر بار ملاقاتشان آموزه‌های تازه‌ای نهفته است و به‌خاطر این که لذت یادگیری جبر جابه‌جائی را به من ارزانی داشتند. از جناب آقای دکتر دیده‌ور نیز به‌خاطر نظریه محاسبه‌پذیری قدردانی می‌کنم.

محسن خانی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

تابستان ۱۳۸۸

---

[۱۳] Gauge spaces

فصل ۱

مقدماتی از نظریه دامنه و آنالیز محاسباتی

۱.۱ معرفی نظریه دامنه

این بخش را به معرفی اجمالی نظریه دامنه اختصاص داده‌ایم. نظریه دامنه تنها یک پیش نیاز برای این پایان نامه محسوب می‌شود و معرفی دقیق آن هدف ما نیست. ازاین‌روی اغلب از برهان‌ها چشم پوشیده به حداقل مفاهیم مورد نیاز بسنده می‌کنیم. خواننده می‌تواند جزئیات بیشتر را در میان سطرهای [۱] جست‌وجو کند.

منظور از $<P,\sqsubseteq>$ در این فصل، یک مجموعه مرتب جزئی است.

◄ تعریف **(۱—۱).** مجموعه ناتهی $A\subseteq P$ را جهت‌دار[1] گوییم هرگاه برای هر جفت از عناصر A یک کران بالا در آن موجود باشد. (یعنی $(\forall x,y\in A\ \exists z\in A\ \ [x,y\sqsubseteq z]$).

اگر مجموعه جهت‌دار A دارای سوپرمم x باشد، آن را با $\sqcup A=x$ نشان می‌دهیم.

◄ تعریف **(۱—۲).** مجموعه مرتب جزئی D را که هر زیرمجموعه جهت‌دار آن دارای سوپرمم است، مجموعه مرتب جزئی جهت دار-کامل [2] می‌نامیم و اغلب آن را براساس مخفف معادل انگلیسی‌اش

[1] Directed
[2] directed-complete partially ordered set

$DCPO$ می‌خوانیم.

◄ مثال **(۱—۳).**

- با ترتیب معمولی در $I\!R$، $[\circ, \infty]$ یک $DCPO$ است اما $(\circ, \infty)$ چنین نیست.

- فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد. درآن‌صورت مجموعه

$$V = \{A \subseteq X : \text{فشرده است } A\}$$

که با عکس شمول مرتب شده است یک $DCPO$ است. این $DCPO$ دارای کوچکترین عضو است اگروتنهااگر X فشرده باشد. (اگر یک $DCPO$ دارای کوچکترین عضو باشد به آن CPO[۳] می گوییم).

- اگر α یک اوردینال باشد، $\alpha + ۱$ یک CPO است.

◄ گزاره **(۱—۴).** مجموعه مرتب جزئی $(P, \sqsubseteq)$ یک $DCPO$ است اگر و تنها اگر هر زنجیر در آن دارای سوپرمم باشد.

◄ تعریف **(۱—۵).** (رابطه تقریب)[۴] فرض کنید x و y عناصر یک $DCPO$ به نام D باشند. می‌گوییم x، y را تقریب می‌زند و می‌نویسیم $x \ll y$ هرگاه برای هر مجموعه جهت‌دار $A \subseteq D$ داشته باشیم:

$$(y \sqsubseteq \sqcup A) \to \exists a \in A \ (x \sqsubseteq a)$$

---
۳ Pointed DCPO
۴ approximation

هم‌چنین برای یک x مشخص مجموعه عناصری که آن را تقریب می‌زنند با $\Downarrow x$ نشان می‌دهیم. یعنی:

$$\Downarrow x = \{y; y \ll x\}$$

عنصر $x \in D$ را فشرده نامیم هرگاه $x \ll x$، و مجموعه عناصر فشرده D را با $K(D)$ می‌نمایانیم.

◄ مثال **(۱—٦).** مجموعه $F = \{[a,b] \subseteq I\!R : a,b \in I\!R, a \leq b\} \cup \{\perp\}$ که با عکس شمول مرتب شده، یک $DCPO$ معروف است که از آن به عنوان مدل محاسباتی[5] $I\!R$ استفاده می‌شود. در این $DCPO$ داریم:

$$I \ll j \Leftrightarrow IntI \supseteq J$$

معرفی کامل F و ویژگی‌های آن در [۱۰] آمده است.

رابطه $\ll$ دارای ویژگی‌های جالب زیادی است که چندی ازآن‌ها را که بیش از دیگران مورد استفاده‌اند، در قضیه زیر آورده‌ایم.

◄ قضیه **(۱—۷).** رابطه $\ll$ دارای خصوصیات زیر است:

۱) $(x \ll y) \to (x \sqsubseteq y)$

۲) $(x \sqsubseteq y \ll z \sqsubseteq t) \to (x \ll t)$

درادامه خواهیم دید که در $DCPO$ های پیوسته خواص مهم تری چون درونیابی نیز بر این خواص افزوده می‌شود.

◄ تعریف **(۱—۸).** (پایه برای یک $DCPO$)[6] فرض کنید D یک $DCPO$ باشد. مجموعه $B \subseteq D$ را

۵ Computational Model
٦ A base for a DCPO

یک پایه برای D نامیم هرگاه برای هر $x \in D$ مجموعه $B_x = \Downarrow x \cap B$ شامل یک مجموعه جهت‌دار $A \subseteq D$ باشد که $x = \sqcup A$. هم‌چنین دراین‌صورت می‌گوییم عناصر B_x، x را نسبت به B تقریب می‌زنند.

◄ **تعریف (۱—۹).** یک $DCPO$ مانند D را دامنه پیوسته[۷] می‌خوانیم اگرچنان‌چه دارای یک پایه باشد. هم‌چنین D را اُمگا ـپیوسته [۸] گوییم هرگاه پایه ای شمارا داشته باشد.

◄ **گزاره (۱—۱۰).** فرض کنید D یک $DCPO$ باشد. آن گاه D پیوسته است اگروتنهااگر برای هر $x \in D$ داشته باشیم $x = \sqcup \Downarrow x$.

◄ **مثال (۱—۱۱).**

- برای $D = (P(X), \subseteq)$ مجموعه

$$B = \{A \subseteq X : \text{متناهی است } A\}$$

یک پایه است.

- برای $D = [\circ, ۱]$ خود D و مجموعه $B = D \cap Q$ پایه هستند که دومی شماراست.

- اگر B پایه ای برای D باشد، هر $B' \supseteq B$ نیز پایه ای برای D است.

◄ **قضیه (۱—۱۲).** (خاصیت درون‌یابی برای رابطه تقریب در دامنه‌های پیوسته)[۹] فرض کنید $(D, \sqsubseteq, \ll)$ یک دامنه پیوسته باشد، $y \in D$ و A زیرمجموعه‌ای *متناهی* از D باشد که $A \ll y$ (یعنی

---

۷ Continous Domain

۸ ω-Continous

۹ Interpolation Property

$(\forall x \in A[x \ll y]$. در این صورت عنصر $y' \in D$ موجود است که $A \ll y' \ll y$.

◄ **تعریف (۱—۱۳).** فرض کنید D و E، هردو $DCPO$ باشند. تابع $f : D \to E$ را پیوسته[۱۰] می‌خوانیم اگر

۱) f یکنوا[۱۱] باشد یعنی $\forall x, y \in D[x \sqsubseteq y \to f(x) \sqsubseteq f(y)]$؛

۲) برای هر مجموعه جهت دار $s \subseteq D$، $f(\sqcup S) = \sqcup f(S)$.

لازم به یادآوری است که اگر $f : D \to E$ یک تابع یکنوا و $A \subseteq D$ جهت‌دار باشد، آن‌گاه $f(A) \subseteq E$ نیز جهت‌دار خواهد بود.

۱.۱.۱ توپولوژی اسکات

امروزه علم توپولوژی به زیبائی وارد جنبه‌هایی از علوم کامپیوتر نظری شده و رفته‌رفته به‌یک ابزاراساسی برای پاسخ به برخی مسائل آن تبدیل شده‌است. ازسوی‌دیگر، پرسش‌های محاسباتی نیز ایده‌های توپولوژیک جدیدی را به بار آورده‌است که نتیجه آن افزایش رابطه بین توپولوژی و شماری دیگر از شاخه‌های ریاضی چون نظریه ترتیب بوده است. به عنوان نمونه توپولوژی اسکات [۱۲] که در ادامه آمده است، به زیبائی مفاهیمی چون ترتیب، تقریب، همگرائی و پیوستگی را در نظریه دامنه توجیه می‌کند. با این توپولوژی، کوچکترین کران بالای یک مجموعه، نقطه حدی آن است.

◄ **تعریف (۱—۱۴).** فرض کنید P یک مجموعه مرتب جزئی باشد. مجموعه $A \subseteq P$ را اسکات ـبسته [۱۳] گوییم هرگاه

۱) A از پایین بسته باشد. یعنی $y \in A \Rightarrow \forall x[x \sqsubseteq y \Rightarrow x \in A]$.

---

۱۰ continuous

۱۱ Monotoe

۱۲ Scott-topology

۱۳ Scott-closed

۲) برای هر مجموعه جهت‌دار $C \subseteq A$ داشته باشیم $\sqcup C \in A$.

توپولوژی اسکات روی یک مجموعه مرتب جزئی D، یک توپولوژی T_0 است. به‌علاوه، این توپولوژی T_1 است اگروتنهااگر P دارای ترتیب گسسته باشد.

◄ مثال (۱—۱۵).

- برای هر $x \in D$، $\downarrow x = \{y; y \sqsubseteq x\}$ اسکات ـبسته است.
- $\uparrow x = \{y; x \sqsubseteq y\}$ لزوماً اسکات ـباز نیست.
- $\Uparrow x = \{y; x \ll y\}$ همواره اسکات ـباز است.
- $\Downarrow x = \{y; y \ll x\}$ لزوماً اسکات ـبسته نیست.

توپولوژی اسکات را می‌توان برحسب مجموعه های باز هم تعریف کرد. هرچند این تعریف، دوگان تعریف بالا است اما آوردن آن خالی از لطف نیست. در واقع $A \subseteq P$ را اسکات ـباز است هرگاه

۱) A از بالا بسته باشد[۱۴].

۲) اگر $C \subseteq P$ جهت دار باشد و $\sqcup C \in A$، آن‌گاه $\exists x \in C$ که $x \in A$.

◄ گزاره (۱—۱۶). فرض کنید $B \subseteq D$ پایه‌ای برای D باشد. آن‌گاه مجموعه $\{\Uparrow x; x \in B\}$ پایه‌ای برای توپولوژی اسکات روی D می‌باشد.

◄ قضیه (۱—۱۷). تابع $f : D \to E$ پیوسته است اگروتنهااگر این تابع با در نظر گرفتن توپولوژی اسکات روی D و E پیوسته باشد.

---
۱۴ Upward closed

مجموعه تمام توابع اسکات ـپیوسته از D به E را با $[D \to E]$ نشان داده آن را به ترتیب زیر مجهز می‌کنیم:

$$f \sqsubseteq g \Leftrightarrow \forall x \in D(f(x) \sqsubseteq g(x))$$

به آسانی ثابت می‌شود که $[D \to E]$ با ترتیب فوق یک $DCPO$ است.

۲.۱.۱ قضیه نقطه ثابت تارسکی

در زیر قضیه نقطه ثابت تارسکی را برای نگاشت های یکنوا روی $DCPO$ هایی که دارای عنصر مینی‌موم اند، آورده‌ایم. در بخش‌های بعدی پایان نامه پس از این که برای یک فضای متریک X یک دامنه به نام BX معرفی نمودیم، خواهیم دید که می‌توان با به کارگیری قضیه نقطه ثابت تارسکی در آن دامنه، به اثبات دیگری برای قضیه نقطه ثابت باناخ در فضاهای متریک رسید.

◄ قضیه **(۱—۱۸).** (تارسکی) فرض کنید D یک $DCPO$ با عنصرمینی‌موم $\perp$ است. آن‌گاه هر تابع یکنوای $f : D \to D$ دارای کوچکترین نقطه ثابت[۱۵]است.

اثبات این قضیه را می‌توان در [۹] و نیز در [۱] جست.

در قضیه بالا اگر «یکنوا» را با «پیوسته» جای‌گزین کنیم اثبات آسان تری خواهیم داشت.

۳.۱.۱ تکمیل ایده‌آلی

در این بخش تکمیل ایده آلی[۱۶] یک مجموعه مرتب جزئی $<P, \sqsubseteq>$ را مطالعه می‌کنیم. مجموعه B را به همراه یک رابطه متعددی $\prec$ یک پایه مجرد[۱۷] گوییم هرگاه

$$\forall p, q \in B[p, q \prec x \to \exists r \in B \quad p, q \prec r \prec x].$$

[۱۵] Fixpoint
[۱۶] Ideal completion
[۱۷] Abstract basis

هم چنین $I \subseteq B$ را یک ایده‌آل مدور نامیم اگرچنان‌چه

۱) I نسبت به رابطه $\prec$ از پایین بسته باشد؛

۲) I نسبت به رابطه $\prec$ جهت دار باشد یعنی $\forall x, y \in I \exists c \in I[x, y \prec c]$؛

۳) برای هر $x \in I$ عنصر $y \in I$ موجود باشد که $x \prec y$.

هر چند شرط دوم، نتیجه ای از شرط اول است اما اهمیت آن تا به حدی است که به جداگانه آوردن می‌ارزد.

◄ تعریف **(۱—۱۹).** فرض کنید B یک پایه مجرد باشد، آن‌گاه مجموعه

$$Idl(B) = \{I \subseteq B : \text{یک ایده آل مدور است } I\}$$

به همراه ترتیب شمول یک $DCPO$ است که آن را تکمیل ایده‌آلی B می‌خوانیم.

تکمیل ایده‌آلی یک پایه مجرد، یک دامنه پیوسته است. به‌علاوه در زیربخش پیشین دیدیم که در یک مجموعه مرتب جزئی، رابطه تقریب دارای خاصیت درونیابی است. پس اگر $(D, \sqsubseteq)$ یک $DCPO$ پیوسته با پایه B باشد، می‌توان $(B, \ll)$ را به عنوان یک پایه مجرد در نظر گرفت. بدین‌ترتیب $(Idle(B), \subseteq)$ یک دامنه پیوسته و ایزومرف ترتیبی با $(P, \sqsubseteq)$ است. مطالب بالا در گزاره زیر خلاصه شده است.

◄ گزاره **(۱—۲۰).** فرض کنید $(D, \sqsubseteq, \ll)$ یک دامنه پیوسته با پایه B باشد. آن‌گاه $(B, \ll)$ یک پایه مجرد و $(Idle(B), \subseteq)$ با $(D, \sqsubseteq)$ ایزومرف است.

۴.۱.۱ دامنه‌های محاسبه‌پذیر

◄ تعریف **(۱—۲۱).** فرض کنید $(D, \sqsubseteq)$ یک دامنه اُمگاپیوسته با پایه شمارای $D_\circ = \{b_\circ, b_\backslash, \ldots\}$ و عنصر مینی‌موم $\perp$ باشد. گوییم D نسبت به پایه $D_\circ$ کارا[۱۸] است، اگرچنانچه رابطه $b_n \ll b_m$ بر

[۱۸] Effectively given with respect to $D_\circ$

حسب n و m یک رابطه $r.e.$ باشد. هم‌چنین عنصر $x \in D$ را محاسبه‌پذیر[۱۹] گوییم هرگاه مجموعه $\{n \in N : b_n \ll x\}$ یک مجموعه $r.e.$ باشد.

خصوصاً وقتی می‌گوییم دامنه D کارا است، یعنی D یک پایه شمارا دارد که نسبت به آن کارا است.

۲.۱ مقدماتی از آنالیز محاسباتی

در پیوست این پایان‌نامه برخی مفاهیم محاسبه‌پذیری روی $I\!N$ و زیرمجموعه های آن آمده است. این مفاهیم دربرگیرنده زیرمجموعه‌ها، دنباله‌ها، روابط و توابع محاسبه‌پذیر مانند $+$ و $\times$ روی $I\!N$ است. در این فصل برآنیم تا مفاهیم آشنای فوق در اعداد طبیعی را به گونه‌ای مناسب به $I\!R$ و دیگر فضاهای ناشمارا تعمیم دهیم. بحث درباره این مضامین و مباحث دیگری چون فضاهای متریک، شبه‌متریک و باناخ بازگشتی، عموماً تحت عنوان «آنالیز محاسباتی»[۲۰] صورت می‌پذیرد. به‌عنوان نمونه وقتی می‌خواهیم مفهوم محاسبه‌پذیری را برای یک فضای باناخ تعریف کنیم، به‌طور طبیعی این تعریف باید چنان باشد که اولاً یک زیرمجموعه شمارای محاسبه‌پذیر از فضای مورد نظر را داشته باشیم. دودیگر این که تابع نرم و اعمال جمع و ضرب اسکالر روی چنین زیرمجموعه‌ای محاسبه‌پذیر باشند و سه‌دیگر این که کل فضا را بتوان با اِعمال این اَعمال محاسبه‌پذیر روی زیرمجموعه محاسبه پذیر فوق به دست آورد. با این شرایط، می‌توانیم ادعا کنیم که کل فضای باناخ مورد نظر، محاسبه‌پذیر است.

درادامه نخست با اعداد حقیقی محاسبه‌پذیر و دنباله های محاسبه‌پذیر از اعداد حقیقی آشنا می‌شویم و سپس به سراغ فضاهای متریک و باناخ محاسبه‌پذیر می‌رویم.

---
[۱۹] Computable
[۲۰] Computable Analysis

۱.۲.۱ اعداد حقیقی محاسبه‌پذیر

می‌دانیم که هر عدد گویا، محاسبه‌پذیر است زیراکه با اعمال محاسبه پذیر روی اعداد طبیعی به دست می آید. لکن در مورد اعداد حقیقی، وضع به‌گونه‌ای دیگر است. مجموعه تمام برنامه‌های رایانه‌ای شماراست حال‌آن‌که تعداد اعداد حقیقی ناشماراست، پس روشن است که همه اعداد حقیقی نمی‌توانند محاسبه‌پذیر باشند.

به بیان اندکی نادقیق، یک عدد حقیقی را محاسبه‌پذیر گوییم هرگاه یک برنامه رایانه‌ای موجود باشد که بتواند با یک روند کارا عدد فوق را تا هر درجه دل‌خواه تقریب بزند. به عنوان مثال عدد π محاسبه‌پذیر است زیرا برای محاسبه آن تا هر تقریب دل‌خواه، تعداد متناهی عمل محاسبه‌پذیر لازم است. روشن است که هرگاه نیاز به تقریب دقیق‌تری داشته باشیم، به محاسبات بیشتری نیازمندیم و برنامه باید به مدت طولانی‌تر اجرا شود؛ لکن روش یا برنامه محاسبه تغییری نمی‌کند.

می‌دانیم که هر عدد حقیقی حد یک دنباله کشی از اعداد گویا است. برای کارا شدن این مفهوم، نیاز به دو شرط داریم:

۱) دنباله اعداد گویا محاسبه‌پذیر باشد.

۲) میل کردن این دنباله به حد خود، کارا باشد.

در ادامه و در مسیر رسیدن به تعریف دقیق عدد حقیقی محاسبه‌پذیر، دو شرط فوق را بررسی می‌کنیم. معنای شرط اول این است که یک برنامه داشته باشیم که هر عضو دنباله را با تعداد متناهی عمل به دست بدهد. شرط دوم نیز بدین معنی است که برنامه‌ای داشته باشیم که هرگاه ورودی $\epsilon > 0$ را بگیرد، خروجی آن نقطه‌ای از دنباله باشد که با خطای کمتر از ϵ حد دنباله است.

کنون تعاریف دقیق را می آوریم.

◄ **تعریف (۱—۲۲).** (دنباله محاسبه پذیر از اعداد گویا) دنباله $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از اعداد گویا را محاسبه‌پذیر

گوییم هرگاه تابع‌های بازگشتی $a, b, s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ موجود باشند که برای هر k، $b(k)$ مخالف صفر باشد و

$$r_k = (-1)^{s(k)} \frac{a(k)}{b(k)}.$$

◄ تعریف **(۱—۲۳).** می‌گوییم دنباله (r_k) از اعداد گویا به نحو کارا به یک عدد حقیقی x میل می‌کند[۲۱] هرگاه یک تابع بازگشتی $e : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ موجود باشد که برای هر n:

$$k \geq e(n) \Rightarrow |r_k - x| \leq 2^{-n}.$$

◄ تعریف **(۱—۲۴).** (عدد حقیقی محاسبه پذیر) عدد حقیقی x را محاسبه‌پذیر گوییم هرگاه دنباله‌ای محاسبه‌پذیر از اعداد گویا موجود باشد که به نحو کارا به x میل کند.

هم‌چنین یک عدد مختلط را محاسبه‌پذیر گوییم هرگاه بخش‌های حقیقی و موهومی آن هر دو محاسبه‌پذیر باشند.

عدد حقیقی محاسبه‌پذیر یک مفهوم اساسی در آنالیز محاسباتی است که با به‌کارگیری آن، مفهوم محاسبه‌پذیری را برای دنباله‌های اعداد حقیقی، تابع های حقیقی و ...تعمیم می‌دهیم. ولی پیش ازآن به بیان یک لم می پردازیم:

◄ لم **(۱—۲۵).** فرض کنید x یک عدد حقیقی محاسبه‌پذیر باشد. دراین‌صورت اگر $x > 0$، آن‌گاه یک روند کارا موجود است که این امر را ثابت کند. برای $x < 0$ نیز، وضع، چنین است. لکن اگر $x = 0$ درحالت کلی هیچ روند کارایی برای اثبات این مطلب وجود ندارد.

[۲۱] to converge effectively

برهان . دراین جا فقط حکم اول را ثابت می کنیم. از آن جا که x یک عدد حقیقی محاسبه‌پذیر است، x حد یک دنباله محاسبه پذیر(r_k) از اعداد گویا است. بنابراین تابع بازگشتی $e(n)$ موجود است که برای هر K، اگر $k \geq e(n)$ آن گاه $|r_k - x| \leq ۲^{-n}$. فرض کنید $x > ۰$؛ در این صورت روش زیر یک روند خاتمپذیر کاراست که $x > ۰$ را ثابت می کند:

$e(n)$ و $r_{e(n)}$ را برای $N = ۰, ۱, ۲, ...$ تا زمانی که

$$r_{e(n)} > ۲^{-n}$$

محاسبه کنید. اگر $x > ۰$ چنین n ای بالأخره پیدا می شود. (ازآن‌جاکه $|r_{e(n)} - x| \leq ۲^{-n}$، کافی است به n ای برسیم که $۲^{-n} < x/۲$). از طرفی شرط $r_{e(n)} > ۲^{-n}$ با توجه به رابطه $|r_{e(n)} - x| \leq ۲^{-n}$ سبب می‌شود که $x > ۰$. □

کنون که با اعداد حقیقی محاسبه‌پذیر آشنا شده‌ایم، به سراغ تعریف دنباله های محاسبه‌پذیر از اعداد حقیقی می رویم. واضح است که یک دنباله متناهی از اعداد حقیقی اگر تمام عناصرش محاسبه‌پذیر باشند، محاسبه‌پذیر است. اما این سخن برای دنباله‌های نامتناهی از اعداد حقیقی درست نیست. زیراکه ممکن است برای هر n برنامه‌ای داشته باشیم که عضو n ام را محاسبه کند، اما راهی برای آمیختن این تعداد نامتناهی برنامه و رسیدن به یک برنامه واحد برای کل اعضای دنباله نداشته باشیم. پس زمانی می‌توان گفت که یک دنباله از اعداد حقیقی محاسبه‌پذیر است که یک برنامه واحد موجود باشد که با ورودی n جمله n ام دنباله را محاسبه کند. این‌بار نیز برای برای این که دنباله x_n از اعداد حقیقی محاسبه‌پذیر باشد، به دو شرط نیاز داریم: ۱) یک دنباله دوتایی x_{nk} [۲۲] از اعداد گویا که اگر $k \to \infty$ آن‌گاه $x_{nk} \to x_n$ و ۲) این همگرایی کارا باشد. دو شرط فوق را در زیر دقیق تر بیان خواهیم کرد.

فرض کنید (x_{nk}) یک دنباله دوتایی از اعداد حقیقی و x_n یک دنباله از اعداد حقیقی باشد به که برای هر n، $x_{nk} \to x_n$ (هر گاه $k \to \infty$). می‌گوییم x_{nk} به طور کارا بر حسب n و k به x_n میل می کند هرگاه

[۲۲] double sequence

یک تابع بازگشتی $e : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ موجود باشد که برای هر m و n:

$$k \geq e(n,m) \Rightarrow |x_{nk} - x_n| \leq ۲^{-m}$$

هم‌چنین یک دنباله دوتایی (x_{nk}) را محاسبه‌پذیر گوییم هرگاه بتوان با استفاده از یک نگاشت بازگشتی از $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$، این دنباله دوتایی را به یک دنباله عادی محاسبه‌پذیر تبدیل نمود.

◄ تعریف **(۱—۲۶).** (دنباله محاسبه پذیر از اعداد حقیقی) دنباله (x_n) از اعداد حقیقی را محاسبه‌پذیر گوییم هرگاه یک دنباله دوتایی محاسبه‌پذیر (r_{nk}) از اعداد گویا موجود باشد که r_{nk} به نحو کارا بر حسب n و k به x_n میل کند.

این صورت معادل از تعریف فوق نیز کاربرد گسترده‌ای دارد: دنباله (x_n) از اعداد حقیقی را محاسبه‌پذیر گوییم هرگاه یک دنباله دوتایی محاسبه‌پذیر (r_{nk}) از اعداد گویا موجود باشد که برای هر $n,k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

$$|r_{nk} - x_n| \leq ۲^{-k}$$

◄ مثال **(۱—۲۷).** دنباله دوتایی

$$x_{nk} = \frac{k}{k+n+۱}$$

هرگاه $k \to \infty$، به دنباله $(x_n) = (۱, ۱, ۱, ...)$ میل می کند. با تعریف $e(n,m) = (n+۱).۲^{-m}$ می‌بینیم که این همگرایی بر حسب k و n کارا است.

برای مثال از دنباله‌ای که غیر کارا به حدش میل می‌کند، و دنباله دوتایی‌ای که غیرکارا به یک دنباله میل می‌کند می‌توان به[۱۹] مراجعه کرد.

درزیر چند گزاره سودمند، بدون اثبات آمده است.

◄ گزاره **(۱—۲۸).** (بسته بودن دنباله‌های محاسبه‌پذیر حقیقی تحت همگرایی کارا) فرض کنید (x_{nk}) یک دنباله دوتایی محاسبه‌پذیر از اعداد حقیقی باشد که به طور کارا بر حسب k و n به دنباله حقیقی x_n میل می‌کند. آن‌گاه (x_n) نیز دنباله‌ای محاسبه‌پذیراست.

◄ گزاره **(۱—۲۹).** (همگرایی یکنوا) فرض کنید (x_{nk}) یک دنباله دوتایی محاسبه‌پذیر از اعداد حقیقی است که به طور صعودی و از بالا به دنباله حقیقی x_n میل می کند؛ یعنی : برای هر n داریم: $x_{n0} \leq x_{n1} \leq x_{n2} \leq \ldots$ و $x_{nk} \to x_n$. آن‌گاه x_n محاسبه‌پذیر است اگروتنهااگر همگرایی بر حسب k و n کارا باشد.

◄ گزاره **(۱—۳۰).** اگر دنباله محاسبه‌پذیر x_n به طور صعودی و از بالا به عدد x میل کند، آن‌گاه x محاسبه‌پذیر است اگروتنهااگر این همگرایی کارا باشد.

◄ گزاره **(۱—۳۱).** دنباله محاسبه‌پذیری از اعداد گویا موجود است که به یک عدد حقیقی غیر محاسبه پذیر میل می کند.

◄ گزاره **(۱—۳۲).** اگر x_n و y_n دنباله‌های محاسبه‌پذیر از اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه $x_n + y_n$، $x_n y_n$، $x_n/y_n (y_n \neq 0)$، $\min\{x_n, y_n\}$ ، $\max\{x_n, y_n\}$، $\exp x_n$ و $\sqrt[m]{x_n} (x_n \geq 0)$ نیز محاسبه‌پذیرند .

۲.۲.۱ فضاهای متریک و باناخ بازگشتی

فضای متریکی را که دارای یک زیرمجموعه چگال شمارش‌پذیر باشد، فضای متریک جدایی‌پذیر می‌نامیم؛ به دیگر بیان، (X, α) را فضای متریک جدایی‌پذیر[۲۳] می‌نامیم هرگاه $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ یک دنباله

[۲۳] Seperable

چگال در X باشد.

◄ **تعریف (۱—۳۳).** (فضاهای متریک بازگشتی) سه‌تایی (X, d, α) را یک فضای متریک بازگشتی[۲۴] گوییم اگر

۱) $d : X \times X \to I\!R$ یک متریک روی X باشد؛

۲) $\alpha : I\!N \to X$ در X چگال باشد؛

۳) $d \circ (\alpha \circ \alpha) : I\!N^{۲} \to I\!R$ یک دنباله دوتایی محاسبه‌پذیر[۲۵] از اعداد حقیقی باشد.

ایده اصلی تعریف فضای متریک بازگشتی (X, α, d) و دیگر فضاهای بازگشتی ناشمارا این است که محاسبه‌پذیری را از یک مجموعه شمارا (در این جا α) به کل فضا گسترش دهیم و این تعمیم باید به‌گونه‌ای باشد که تابع متریک و عمل حدگیری روی کل فضا محاسبه‌پذیر شوند. منظور از عمل حدگیری[۲۶] عملگر $\lim :\subseteq X^{I\!N} \to X, (x_n)_{n\in I\!N} \to \lim_{n\to\infty} x_n$ است که روی دنباله های سریعاً همگرا تعریف می شود:

$$dom(\lim) = \{(x_n)_{n\in I\!N} : \forall n > k\ [d(x_n, x_k) \leq ۲^{-k}]$$ و $(x_n)_{n\in N}$ همگراست دنباله$\}$

◄ **مثال (۱—۳۴).** فضای $(I\!R^n, d, \alpha)$ با متر اقلیدسی:

$$d(x, y) = \sqrt{\Sigma |x_i - y_i|^{۲}}$$

که α شمارشی از Q^n است، یک فضای متریک بازگشتی است. نقاط محاسبه‌پذیر این فضا همان نقاط محاسبه‌پذیر $I\!R^n$ هستند.

---

۲۴ Recursive Metric space

۲۵ Computable Double sequence of real numbers

۲۶ Limit operation

کنون آماده‌ایم تا فضای باناخ محاسبه‌پذیر را تعریف کنیم. برای فضای باناخ محاسبه‌پذیر در مقالات، تعاریف گوناگونی آمده است که گاهی با هم معادل نیستند. مثلاً رویکرد عدالت در [۱۲] با رویکرد براتکا در [٦] تفاوت قابل ملاحظه‌ای دارد. به‌هرروی، دراین جا به تعریف براتکا که ساده‌تر است و به تعریف فضای متریک بازگشتی شبیه‌تر، بسنده می‌کنیم. در این تعریف فضای باناخ را روی میدان $I\!R$ در نظر گرفته‌ایم.

درضمن برای این که بحث به درازا نینجامد، به ناچار از تعریف توابع حقیقی محاسبه‌پذیر خودداری نموده‌ایم. هنگام استفاده از ماشین تورینگ برای محاسبه این توابع در یک نقطه x، هر چه با اعمال محاسبه‌پذیر به x نزدیک‌تر شویم، در خروجی به تقریب بهتری برای $f(x)$ دست می‌یابیم.

◄ **تعریف (۱—۳۵).** (فضای باناخ محاسبه‌پذیر) یک فضای باناخ محاسبه‌پذیر $(X, ||\,||, e)$ عبارت است از یک فضای باناخ جدائی پذیر $(X, ||\,||)$ به‌همراه یک دنباله چگال $e : I\!N \to X$ بدین‌سان که فضای متریک تولید شده به وسیله نرم، یک فضای متریک محاسبه‌پذیر است و به واسطه آن اعمال خطی جمع و ضرب در اسکالر محاسبه‌پذیر می‌شوند.

آوردن تعریف براتکابرای فضاهای شبه‌متریک بازگشتی نیاز به مقدمات زیادی دارد، زین‌سبب و برای وارهیدن از اطناب، از آوردن آن خودداری نموده و بحث در مورد فضاهای شبه‌متریک محاسبه پذیر را به فصل ۵ موکول کرده‌ایم .

فصل ۲

یک مدل محاسباتی برای فضاهای متریک

معرفی مدل محاسباتی برای ساختارهای ریاضی، سرخط مطالعات ارزشمند زیادی در نظریه محاسبه‌پذیری بوده است. درمیان مدل های محاسباتی‌ای که برای فضاهای متریک معرفی می‌شوند، مدل عدالت و هکمن در[۱۱] از سادگی و کارایی چشم‌گیری برخوردار است و به‌علاوه ایده اصلی ما در معرفی مدل محاسباتی برای فضاهای متریک مخروطی است. زین روی، این فصل را از پایان‌نامه را اختصاص به آشنایی با آن مدل داده‌ایم.

درسطرهای این فصل، برای یک فضای متریک X یک مجموعه مرتب خطی پیوسته(و نه لزوماً $DCPO$) به نام BX معرفی و نشان می‌دهیم که چگونه فضای X به همراه توپولوژی متریک با فضای نقاط ماکزیمال BX به‌همراه توپولوژی اسکات هومئومرف است و ویژگی‌های ترتیبی BX چه رابطه تنگاتنگی با ویژگی‌های متریک X دارد. وانگهی دنباله‌های صعودی در BX متناظر با دنباله‌های کشی در X و کوچکترین کران‌های بالا در BX متناظر با حدها در X هستند. درنتیجه مجموعه مرتب جزئی BX، جهت دار-کامل است اگروتنهااگر فضای متریک X کامل باشد. که این خود یک ارتباط زیبا بین کامل بودن یک ترتیب جزئی و کامل بودن یک فضای متریک است. به‌علاوه یک پایه برای مجموعه مرتب جزئی پیوسته BX متناظر است با یک زیر مجموعه چگال از X. بنابراین مجموعه مرتب جزئی BX، اُمگا-کامل است (یعنی یک پایه شمارا دارد) هر گاه X جدایی پذیر باشد (یعنی یک زیر مجموعه

چگال شمارا داشته باشد).

به‌کارگیری این روش، هم‌چنین به ساختن مدل‌های محاسباتی ساده‌تر برای فضاهای هیلبرت و باناخ می انجامد. زیراکه اگر X یک فضای برداری نرم‌دار باشد، آن‌گاه BX با مجموعه شامل تمام گوی های بسته درX که با عکس شمول مرتب شده، ایزومرف است. درنتیجه برای یک فضای باناخ جدایی‌پذیر و به‌ویژه برای یک فضای هیلبرت X، BX یک مجموعه مرتب جزئی جهت‌دار-کامل اُمگا -پیوسته است.

در بخش ۲.۱.۱ با *قضیه نقطه ثابت تارسکی* برای نگاشت های یکنوا روی مجموعه‌های مرتب جزئی جهت -دار کامل آشنا شدیم. در اواخر این فصل خواهیم دید که اگر f یک نگاشت انقباضی روی فضای متریک کامل X باشد، می‌توان آن را به یک نگاشت یکنوای g روی BX توسیع داد و بدین‌سان قضیه نقطه ثابت باناخ برای نگاشت های انقباضی روی فضاهای متریک کامل را از قضیه نقطه ثابت تارسکی برای توابع یکنوا روی $DCPO$ ها نتیجه گرفت.

۱.۲ گوی‌های بسته و گوی‌های فرمال

یک فضای متریک (X,d) را در نظر بگیرید. فرض‌کنید CX مجموعه تمام گوی‌های بسته $c(x,r)$ در X باشد که با ترتیب جزئی عکس‌شمول $\supseteq$ مرتب شده‌اند. آن‌گاه، گوی های بسته ماکزیمال در CX به شکل $c(x,0)$ و در تناظر یک به یک با نقاط فضای متریک X اند. بدین‌ترتیب از هر فضای متریک X می‌توان به یک مجموعه مرتب جزئی CX رسید که به‌نوعی شامل X است. اما آیا CX جهت دار -کامل است؟ ازبخت‌بد پاسخ این پرسش، حتی درحالتی که X یک فضای متریک کامل باشد، منفی است. به‌عنوان نمونه فرض کنید (x_n) یک دنباله باشد که (برای هر $m,n \in \mathbb{N}$) $d(x_n,x_m) = 1 + \frac{1}{n+m}$. قرار دهید $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. فاصله هر دو نقطه در X بیش از ۱ است و لذا در X هیچ دنباله کشی‌ای موجود نیست؛ یعنی X یک فضای متریک کامل است. اکنون نشان می‌دهیم که CX کامل نیست. در بخش ۱.۱ دیدیم که مجموعه مرتب جزئی D یک $DCPO$ است اگروتنهااگر هر زنجیر در آن دارای

کوچک‌ترین کران بالا باشد. زنجیر

$$c_n = c(x_n, ۱ + \frac{۱}{۲n}) = \{x_i : i \geq n\}$$

در در نظر بگیرید. به روشنی: $c_۱ \supseteq c_۲ \supseteq ...$ حال آن‌که $\cap c_i = \Phi$. یعنی (c_n) زنجیری است که هیچ کران بالایی ندارد. با این اوصاف، CX مدل چندان مناسبی به نظر نمی‌رسد. لکن همان‌گونه که در ادامه آورده‌ایم، این ساختار، ایده اولیه ساختار مورد نظر ما در این فصل است.

بااستفاده از نابرابری مثلثی، به آسانی می‌توان دید که اگر $d(x,y) \leq r - s$ آن گاه $c(x,r) \supseteq c(y,s)$. لکن با نگاهی به $c(x,r)$ های مثال بند پیشین، می‌بینیم که وارون این امر لزوماً برقرار نیست. در تعریف زیر و در ادامه بحث، ایده بالا به‌خوبی به کار گرفته شده است.

◄ تعریف **(۲—۱).** فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. تعریف می کنیم:

$$BX = X \times I\!R^+$$

و BX را مجموعه گوی های فرمال X[۱] می‌نامیم. هم‌چنین به هر عنصر $(x,r) \in BX$ یک گوی فرمال در فضای متریک (X,d) می‌گوییم.

روی مجموعه گوی های فرمال فضای متریک X رابطه $\sqsubseteq$ را بدین‌سان تعریف می کنیم:

$$(x,r) \sqsubseteq (y,s) \Leftrightarrow d(x,y) \leq r - s$$

رابطه $(x,r) \sqsubseteq (y,s)$ به روشنی ایجاب می‌کند که $r \geq s$.

◄ گزاره **(۲—۲).** برای یک فضای متریک X، $(BX, \sqsubseteq)$ یک مجموعه مرتب جزئی است.

نقاط ماکزیمال در BX، گوی‌های فرمال به‌شکل $(x, ۰)$ و در تناظر یک به‌یک با نقاط X اند.

۱ The set of formal balls in X

۲.۲ دنباله های صعودی در BX

همان‌گونه که از پیش می‌دانیم، بسیاری از ویژگی‌های فضاهای توپولوژیک با مطالعه حد شبکه *ها* آزموده می‌شود؛ لکن در مورد فضاهای متریک کار اندکی ساده‌تر می‌نماید و به‌جای مطالعه حد شبکه‌ها، کافی است به بررسی حد *دنباله ها* بپردازیم. مجموعه مرتب جزئی BX نیز ویژگی مشابهی دارد: به‌جای بررسی کوچکترین کران بالا در *مجموعه‌های جهت‌دار*، کافی است آن را برای *دنباله های صعودی* بررسی کنیم.

◄ قضیه **(۲−۳).** فرض کنید D یک زیرمجموعه جهت‌دار از BX باشد. آن‌گاه یک دنباله صعودی $\ldots \sqsubseteq (x_۲, r_۲) \sqsubseteq (x_۱, r_۱)$ از عناصر D یافت می‌شود که مجموعه کران‌های بالای آن بامجموعه کران های بالای D یکسان است.

برهان . قرار دهید $s = \inf\{r : \exists x \in X \quad (x, r) \in D\}$. بنابر ویژگی‌های inf دنباله (y_n, s_n) از اعضای D موجود است که برای هر $n \in I\!N$، $s_n \leq s + ۱/n$. دنباله (x_n, r_n) از اعضای D را بدین‌صورت بسازید: قرار دهید $(x_۱, r_۱) = (y_۱, s_۱)$ و فرض کنید (x_n, r_n) یک کران بالا برای (y_n, s_n) و $(x_{n-۱}, r_{n-۱})$ در D باشد (که به علت جهت‌دار بودن D این امر میسر است). دنباله فوق با توجه به نحوه ساخت، صعودی است. اکنون نشان می‌دهیم که مجموعه کران‌های بالای دنباله (x_n, r_n) با مجموعه کران‌های بالای D یکسان است. فرض کنید (z, t) یک کران بالا برای دنباله (x_n, r_n) باشد. عنصر (a, u) از D را به‌دل‌خواه برگزینید. کنون کافی‌است نشان دهیم: $(a, u) \sqsubseteq (z, t)$. ازآن‌جا که D جهت‌دار است، دنباله (b_n, v_n) از اعضای D را می‌توان چنان ساخت که برای هر n، عنصر (b_n, v_n) یک کران بالا برای (a, u) و (x_n, r_n) در D باشد. حال برای هر $n \in I\!N$ داریم:

$$d(a, z) \leq d(a, b_n) + d(b_n, x_n) + d(x_n, z)$$

$$\leq (u - v_n) + (r_n - v_n) + (r_n - t)$$

$$\leq u - t + ۲(r_n - s)$$

$$\leq u - t + ۲/n.$$

در نتیجه $d(a, z) \leq u - t$ یعنی $(a, u) \sqsubseteq (z, t)$. □

گزاره بعدی نشان می‌دهد که چگونه دنباله‌های صعودی در BX با دنباله‌های کشی در X مرتبط‌اند.

◄ گزاره **(۲—۴).** فرض کنید $(x_۱, r_۱) \sqsubseteq (x_۲, r_۲) \sqsubseteq ...$ یک دنباله صعودی در BX باشد. آن‌گاه دنباله (r_n) در $I\!R$ نزولی و همگرا و دنباله (x_n) یک دنباله کشی در X است.

برهان . رابطه $(x_n, r_n) \sqsubseteq (x_{n+۱}, r_{n+۱})$ ایجاب می‌کند که $r_n \geq r_{n+۱}$. یعنی (r_n) یک دنباله نزولی است. هم‌چنین برای هر n، $r_n \geq ۰$. بنابراین (r_n) یک دنباله همگرا و به ویژه کشی است. درنتیجه به‌ازای هر $\epsilon > ۰$ یک $N \in I\!N$ موجود است که برای هر $m, n > N$، $|r_n - r_m| < \epsilon$. علاوه‌براین، برای $N \leq m \leq n$ داریم $(x_m, r_m) \sqsubseteq (x_n, r_n)$ و ازاین‌رو $d(x_m, x_n) \leq r_m - r_n < \epsilon$ یعنی (x_n) یک دنباله کشی است. □

در ادامه عکس گزاره بالا نیز اثبات می‌شود.

◄ لم **(۲—۵).** هر دنباله کشی (x_n) در X زیردنباله‌ای چون $(x_{n_k})_{k \in I\!N}$ دارد که $(x_{n_k}, ۲^{-k})$ یک دنباله صعودی در BX است.

برهان . قرار دهید $n_۰ = ۰$. برای هر $k \in I\!N$، عنصر $n_k > n_{k-۱}$ در $I\!N$ موجود است که اگر $i, j \geq n_k$، آن‌گاه:

$$d(x_i, x_j) \leq ۲^{-(k+۱)} = ۲^{-k} - ۲^{-(k+۱)}$$

یعنی: $(x_{n_k}, ۲^{-k}) \sqsubseteq (x_{n_{k+۱}}, ۲^{-(k+۱)})$. □

قضیه زیر یک رابطه نزدیک بین کوچک‌ترین کران‌های بالا در BX و حدها در X، برقرار می‌سازد.

◄ قضیه **(۲—۶).** برای هر دنباله صعودی $(x_n, r_n)_{n\in I\!N}$ و هر عنصر (y, s) در BX گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱) (y, s) کوچک‌ترین کران بالای دنباله (x_n, r_n) است؛

۲) (y, s) یک کران بالا برای (x_n, r_n) است و $\lim_{n\to\infty} r_n = s$؛

۳) $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ و $\lim_{n\to\infty} r_n = s$.

برهان . (۱ به ۲) دنباله $(x_n, r_n)_{n\in I\!N}$ یک دنباله صعودی با کران بالای (y, s) است، پس (r_n) یک دنباله نزولی با کران پایین s است. کنون، تنها کافی است نشان دهیم که برای هر $\epsilon > ۰$ یک $n \in I\!N$ یافت می‌شود که $r_n < s + \epsilon$. فرض کنید چنین نباشد، یعنی، یک $\epsilon > ۰$ موجود باشد که برای هر $n \in I\!N$، $r_n \geq s + \epsilon$. بنابه گزاره ۲—۴، (x_n) یک دنباله کشی است، پس $N \in I\!N$ موجود است که هرگاه $n, m \geq N$، $d(x_n, x_m) < \epsilon/۲$. ازاین‌رو برای هر $n \geq N$، $d(x_n, x_N) < \epsilon/۲ \leq r_n - (s + \epsilon/۲)$ یا $(x_n, r_n) \sqsubseteq (x_N, s + \epsilon/۲)$. ازآن‌جا که دنباله (x_n, r_n) صعودی است، $(x_N, s + \epsilon/۲)$ یک کران بالا برای کل این دنباله است. پس $(y, s) \sqsubseteq (x_N, s + \epsilon/۲)$ و درنتیجه $s \geq s + \epsilon/۲$ که این یک تناقض است.

(۲ به ۳). برای هر $n \in I\!N$، $(x_n, r_n) \sqsubseteq (y, s)$ یا $d(x_n, y) \leq r_n - s$. هم‌چنین بنابه فرض، $\lim_{n\to\infty} r_n = s$؛ پس $\lim_{n\to\infty} x_n = y$.

(۳ به ۱). نخست نشان می‌دهیم که (y, s) یک کران بالا برای (x_n, r_n) است. برای هر $m \geq n$ داریم $(x_n, r_n) \sqsubseteq (x_m, r_m)$ و ازاین‌روی $d(x_n, x_m) \leq r_n - r_m$. حال اگر m به بی‌نهایت میل کند، سبب می‌شود که $d(x_n, y) \leq r_n - s$، پس $(x_n, r_n) \sqsubseteq (y, s)$.

فرض کنید (z,t) کران بالای دیگری برای این دنباله باشد؛ آن‌گاه برای هر $n \in I\!\!N$، $(x_n,r_n) \sqsubseteq (z,t)$ و بدین‌ترتیب $d(x_n,z) \leq r_n - t$. اکنون اگر n را به بی‌نهایت میل دهیم به $d(y,z) \leq s-t$ می‌رسیم و این یعنی $(y,s) \sqsubseteq (z,t)$. □

قضیه فوق ما را به سوی یک ارتباط تنگاتنگ بین کامل بودن فضای متریک X و جهت‌دار ـکامل بودن BX رهنمون می‌سازد. این ارتباط در قضیه بعد به نحو ملموس‌تری نشان داده شده است.

◄ قضیه **(۲—۷).** برای یک فضای متریک X موارد زیر با هم معادل‌اند:

۱) X یک فضای متریک کامل است؛ یعنی هر دنباله کشی در آن همگرا است.

۲) هر دنباله صعودی در BX دارای کوچک‌ترین کران بالا است.

۳) BX یک $DCPO$ است؛ یعنی هر زیرمجموعه جهت‌دار آن دارای کوچک‌ترین کران بالا است.

برهان . معادل بودن ۲ و ۳ پیام مستقیم قضیه ۲—۳ است.

(۱ به ۲). فرض کنید X یک فضای متریک کامل باشد. اگر $(x_n,r_n)_{n\in I\!\!N}$ یک دنباله صعودی در BX باشد، آن‌گاه طبق گزاره ۲—۴ $(r_n)_{n\in I\!\!N}$ به یک عنصر $s \in I\!\!R^+$ میل می‌کند و $(x_n)_{n\in I\!\!N}$ یک دنباله کشی در X است. بنابر کامل بودن X، $(x_n)_{n\in I\!\!N}$ نیز به یک عنصر y در X همگرا است. پس طبق قضیه ۲—٦، (y,s) کوچک‌ترین کران بالای $(x_n,r_n)_{n\in I\!\!N}$ است.

(۲ به ۳). فرض کنید (x_n) یک دنباله کشی در X باشد. بنابه لم ۲—۵، $(x_n)_{n\in I\!\!N}$ دارای یک زیردنباله $(x_{n_k})_{k\in I\!\!N}$ است که $(x_{n_k},۲^{-k})$ صعودی است. هم چنین طبق ۲، $(x_{n_k},۲^{-k})$ دارای کوچک‌ترین کران بالای (y,s) است. پس از قضیه ۲—٦ برمی‌آید که $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = y$؛ یعنی زیردنباله $(x_{n_k})_{k\in I\!\!N}$ از $(x_n)_{n\in I\!\!N}$ همگراست. و ازآن‌جا که $(x_n)_{n\in I\!\!N}$ کشی است، این دنباله خود نیز همگراست. □

۳.۲ پیوستگی BX

در این بخش خواهیم دید که برای یک فضای متریک X، مجموعه مرتب خطی BX پیوسته است. عموماً پیوستگی و دیگر مسائل مربوط به آن برای $DCPO$ ها تعریف می‌شوند لکن تعمیم آن‌هابه مجموعه‌های مرتب جزئی چندان دشوار نیست؛ کافی است در تعاریف مربوطه به‌جای «برای هر زیرمجموعه جهت‌دار» عبارت «برای هر زیرمجموعه جهت‌داری که دارای کوچک ترین کران بالا است» را جای‌گزین می‌کنیم. این کار در [۲۴] انجام شده است و در آن مجموعه های مرتب جزئی پیوسته معرفی و ثابت شده‌است که خواص آن‌ها کاملاً مشابه $DCPO$ های پیوسته است. به‌عنوان نمونه رابطه تقریب در یک مجموعه مرتب خطی نیز دارای خاصیت درون‌یابی است و مجموعه‌های $\Uparrow b$ تشکیل پایه برای توپولوژی اسکات می دهند.

در زیر نخست به رابطه تقریب در BX می‌پردازیم.

◄ گزاره **(۲—۸).** برای هر (x,r) و (y,s) در BX داریم:

$$(x,r) \ll (y,s) \Leftrightarrow d(x,y) < r-s$$

برهان . ابتدا فرض کنید $(x,r) \ll (y,s)$. دنباله صعودی $a_n = (y, s+1/n)$ طبق قضیه ۲—۶ دارای کوچک‌ترین کران بالای (y,s) است. یعنی: $(x,r) \ll (y,s) = \sqcup(y, s+1/n)$. بنابراین nای یافت می شود که $(x,r) \sqsubseteq (y, s+1/n)$ و درنتیجه $d(x,y) \leq r-s-1/n < r-s$.

کنون فرض کنید $d(x,y) < r-s$. دراین‌صورت $\epsilon > 0$ موجود است که $d(x,y) < r-s-\epsilon$. فرض کنید S زیرمجموعه جهت‌داری از BX باشد که $\sqcup S = (z,t)$ و $(y,s) \sqsubseteq (z,t)$. طبق قضیه ۲—۳ دنباله صعودی $(z_n, t_n)_{n \in I\!N}$ در S با کوچک‌ترین کران بالای (z,t) موجود است. هم‌چنین بنابر قضیه ۲—۶ $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ و $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. بنابراین می‌توانیم $n \in I\!N$ را چنان بیابیم که $d(z_n, z) < \epsilon/2$ و

$t_n < t + \epsilon/۲$. بدین ترتیب:

$$d(x, z_n) \leq d(x, y) + d(y, z) + d(z, z_n)$$

$$< (r - s - \epsilon) + (s - t) + \epsilon/۲$$

$$= r - (t + \epsilon/۲) < r - t_n$$

پس $(x, r) \ll (z_n, t_n)$. □

اکنون وقت آن رسیده که پیوستگی BX را بیازمائیم. در ادامه خواهیم دید که BX پیوسته است و از یک زیرمجموعه چگال X و یک زیر مجموعه چگال R^+ می‌توان به یک پایه BX رسید. پیش‌ازآن، یادآوری می‌کنیم که زیرمجموعه B از مجموعه مرتب جزئی P را یک پایه برای P می نامیم هرگاه برای هر $p \in P$، مجموعه $B_p = \{b \in B : b \ll p\}$ جهت‌دار و دارای کوچک‌ترین کران بالای p باشد. در حالتی که $P = BX$، از قضیه ۲–۳ چنین برمی‌آید که B یک پایه برای P است اگروتنهااگر برای هر $(x, r) \in BX$ مجموعه $B_{(x,r)}$ شامل یک دنباله صعودی با کوچک‌ترین کران بالای (x, r) باشد.

◄ گزاره **(۲–۹).** فرض کنید A یک زیرمجموعه چگال از فضای متریک X و Q یک زیرمجموعه چگال از $I\!R^+ = [۰, \infty)$ باشد. آن‌گاه $A \times Q$ پایه‌ای برای BX است.

برهان . عنصر $(x, r) \in BX$ را در نظر بگیرید. برای هر $n \in I\!N$ عنصر $a_n \in A$ و $q_n \in Q$ موجود است که $d(a_n, x) < ۴^{-n}$ و $r + ۲.۴^{-n} < q_n < r + ۳.۴^{-n}$. بنابراین $d(a_n, x) < ۴^{-n} < ۲.۴^{-n} < q_n - r$ یعنی $(x, r) \ll (a_n, q_n)$. حال برای هر $n > ۱$ داریم:

$$d(a_{n-۱}, a_n) \leq d(a_{n-۱}, x) + d(a_n, x)$$

$$< ۴^{-(n-۱)} + ۴^{-n} = ۵.۴^{-n}$$

$$= (r + ۲.۴^{-(n-۱)}) - (r + ۳.۴^{-n})$$

$$< q_{n-1} - q_n$$

درنتیجه $(a_n, q_n) \sqsubseteq (a_{n-1}, q_{n-1})$. به‌روشنی $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ و $\lim_{n\to\infty} q_n = r$. پس (x, r) طبق قضیه ۲—۶ کوچک‌ترین کران بالای دنباله صعودی (a_n, q_n) است. □

جهت عکس قضیه فوق را در گزاره زیر بررسی می کنیم.

◄ گزاره **(۲—۱۰).** فرض کنید B یک پایه برای BX باشد. درآن‌صورت مجموعه $\{a \in X : \exists r(a, r) \in B\}$ یک مجموعه چگال در X است.

برهان . برای هر $x \in X$ یک دنباله صعودی $(a_n, r_n)_{n\in \mathbb{N}}$ از عناصر B با کوچک‌ترین کران بالای $(x, 0)$ موجود است. طبق قضیه ۲—۶ دنباله (a_n) به x همگرا است. □

نتیجه زیر چکیده مطالب این بخش (تا کنون)است.

◄ نتیجه **(۲—۱۱).** برای هر فضای متریک X، BX یک مجموعه مرتب جزئی پیوسته است. به‌علاوه BX اُمگا ـپیوسته است (یعنی دارای یک پایه شمارا است) اگروتنهااگر X جدائی‌پذیر باشد.

برهان . گفتیم یک مجموعه مرتب جزئی، پیوسته است هرگاه دارای پایه باشد. قضیه ۲—۹ نشان می‌دهد که $BX = X \times \mathbb{R}^+$ یک پایه برای BX است. افزون براین، اگر X دارای زیر مجموعه چگال Y باشد، طبق قضیه ۲—۹، $Y \times Q^+$ پایه‌ای برای BX است.

اگر BX، اُمگا ـپیوسته باشد، بنابه قضیه ۲—۱۰، یک زیرمجموعه چگال شمارا برای X پیدا می‌شود. □

۴.۲ نشاندن X در BX

این فصل را به بررسی تابع $i : X \to BX$ با ضابطه $ix = (x, 0)$ اختصاص داده‌ایم. روشن است که تابع i یک تناظر یک‌به‌یک بین X و زیرمجموعه $X^+ = X \times \{0\}$ از BX برقرار می‌سازد.

◄ گزاره **(۲—۱۲).** عناصر X^+ دقیقاً همان عناصر ماکزیمال BX هستند.

معمولاً روی BX توپولوژی اسکات را در نظر می‌گیریم مگر آن که جز آن تأکید شده باشد.

◄ گزاره **(۲—۱۳).** X^+ یک G_δ ـزیرمجموعه از BX است.

برهان . برای هر $n \in I\!N$، مجموعه $O_n = \cup_{x\in X} \Uparrow (x, 1/n)$ در BX، اسکات ـباز است. به آسانی می‌توان دید که $O_n = X \times [0, 1/n)$. درنتیجه $\cap_{n\in I\!N} O_n$ دقیقاً همان X^+ است. □

بنابر گزاره ۲—۸برای هر (x,r) در BX داریم:$i^{-1}(\Uparrow (x,r)) = O(x,r)$. می‌دانیم که $\Uparrow (x,r)$ ها یک پایه برای توپولوژی اسکات روی BX و $O(x,r)$ ها یک پایه برای توپولوژی متریک روی X تشکیل می‌دهند. بنابراین نگاشت i یک نشاندن توپولوژیک است که X را به‌همراه توپولوژی متریک با X^+ به‌همراه توپولوژی اسکات، هومئومرف می‌سازد.

مکمل‌های مجموعه‌های $\uparrow (x,r)$ به‌همراه مجموعه‌های $\Uparrow (x,r)$ (بنابه تعریف) تشکیل یک زیر پایه برای توپولوژی لاوسون [۲] روی BX می‌دهند. از تعریف رابطه $\sqsubseteq$ در BX داریم: $i^{-1}(\uparrow (x,r)) = c(x,r)$ یعنی اگر روی BX توپولوژی لاوسون را در نظر بگیریم، باز هم i یک نشاندن توپولوژیک است. خلاصه مطالب بالا در قضیه زیر آمده است.

◄ قضیه **(۲—۱۴).** روی مجموعه $X^+ = \max(BX)$ توپولوژی اسکات و توپولوژی لاوسون یکسان‌اند و تابع $i : X \to BX$ با ضابطه $ix = (x, 0)$ یک هومئومرفیسم از X با توپولوژی متریک

[۲] Lawson topology

به‌روی X^+ با توپولوژی اسکات یا لاوسون می‌باشد.

پیش‌تر گفتیم که اگر X یک فضای متریک جدایی‌پذیر باشد، آن‌گاه BX یک دامنه اُمگا ـپیوسته است. بدین‌ترتیب می‌توان برای BX مفهوم کارا بودن را تعریف نمود (تعریف۱—۲۱). ازآن‌جاکه X با $X^+ \subseteq BX$ هومئومرف است، BX یک چهارچوب محاسباتی مناسب برای فضای متریک جدائی‌پذیر X به‌دست می‌دهد. یادآوری می‌کنیم که فضای پولیش [۳] یک فضای توپولوژیک است که با یک متریک جدایی پذیر، متریک‌پذیر باشد. پس به ترتیبی که در این فصل آمد، برای یک فضای پولیش نیز، با در نظر گرفتن یک متریک جدائی‌پذیر و دامنه گوی های فرمال برای این متریک، می‌توان یک مدل محاسبه‌پذیر معرفی کرد.

۵.۲ فضاهای برداری نرم دار

در بخش۱.۲ گفتیم که $c(x,r) \supseteq c(y,s)$ در حالت کلی نامساوی $d(x,y) \leq r-s$ را سبب نمی شود. در ادامه می‌بینیم که در یک فضای برداری نرم‌دار غیربدیهی دو عبارت فوق معادل‌اند.

◄ قضیه **(۲—۱۵)**. در یک فضای برداری نرم‌دار غیربدیهی داریم:

$$C(x,r) \supseteq C(y,s) \Leftrightarrow d(x,y) \leq r-s$$

برهان . قرار دهید $t = d(x,y)+s$. در حالتی که $x=y$، u را عنصر دیگری در X جز از x بگیرید (بنابر غیربدیهی بودن X چنین عنصری موجود است). اما درصورتی‌که $x \neq y$، قرار دهید $u=y$ و در هر دو حال قرار دهید $z = x + t/d(x,u)(u-x)$. با این فرض‌ها، داریم: $d(x,z)=t$ و $d(y,z)=s$.

---
[۳] Polish Space

درنتیجه $z \in C(y,s) \subseteq C(x,r)$. پس $d(x,y)+s=t=d(x,z)\leq r$ یعنی $d(x,y)\leq r-s$. □

◄ نتیجه **(۲—۱۶).** برای یک فضای برداری نرم‌دار غیربدیهی، مجموعه مرتب جزئی گوی‌های فرمال و مجموعه گوی‌های بسته با ترتیب جزئی عکس‌شمول، ایزومرف ترتیبی [۴] اند.

◄ نتیجه **(۲—۱۷).** برای یک فضای باناخ غیربدیهی جدایی‌پذیر و خصوصاً برای یک فضای هیلبرت غیربدیهی جدائی پذیر، مجموعه گوی‌های بسته با ترتیب عکس‌شمول (با نمادگذاری‌های بخش ۲.۱:($CX,\supseteq$)) یک $DCPO$ اُمگاپیوسته است.

۲.۶ کامل‌سازی یک فضای متریک

فضای متریک (X,d) را در نظر بگیرید. فرض‌کنید $(\bar{X},\bar{d})$ کامل‌شده متریک[۵] (X,d) باشد (که تحدید $\bar{d}$ به X همان d است). بنابه قضیه۲—۷، $(B\bar{X},\sqsubseteq)$ یک $DCPO$ پیوسته است. ازسوی‌دیگر BX یک مجموعه مرتب جزئی پیوسته است؛ پس $(BX,\ll)$ یک پایه مجرد و کامل‌شده ایده‌آلی آن $Idle(BX)$ یک $DCPO$ پیوسته است. کنون ادعا می‌کنیم که دو $DCPO$ پیوسته $B\bar{X}$ و $Idle(BX)$ با هم ایزومرف‌اند.

ازآن‌جا که X در $\bar{X}$ چگال است، طبق گزاره۲—۹، مجموعه $BX = X\times I\!R^{+}$ پایه‌ای برای $B\bar{X}$ است. پس بنابه گزاره۱—۲۰، $B\bar{X}$ با کامل شده ایده‌آلی پایه‌اش ایزومرف است.

براساس این نتایج، با به کارگیری روش‌های نظریه دامنه‌ای، کامل شده[۶] یک فضای متریک نیز به‌دست می‌آید. بدین سان که نخست برای یک فضای متریک (X,d)، مجموعه مرتب جزئی پیوسته $(BX,\sqsubseteq)$ را می‌سازیم. سپس $(BX,\ll)$ را به عنوان یک پایه مجرد در نظر گرفته قرار می‌دهیم: $D=Idle(BX,\ll)$. در بند پیشین آمد که $(D,\subseteq)$ با $(B\bar{X},\sqsubseteq)$ ایزومرف است. بنابراین طبق

[۴] Order isomorphic
[۵] Metric Completion
[۶] completion

قضیه۲—۱۴، $\bar{X}$ با $\max(D)$، مجموعه نقاط ماکزیمال D با توپولوژی اسکات، هومئوورف است.

۷.۲ فانکتور B و قضیه نقطه ثابت

در این بخش فانکتور B از کاتگوری فضاهای متریک به کاتگوری مجموعه‌های مرتب جزئی پیوسته را معرفی می کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان به مدد این فانکتور، قضیه نقطه ثابت باناخ برای فضاهای متریک کامل را از قضیه نقطه ثابت تارسکی برای $DCPO$ ها نتیجه گرفت.

۱.۷.۲ فانکتور B

فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع بین دو فضای متریک X و Y باشد. عدد $c \in I\!R^+$ را یک *ثابت لیپشیتز*[۷] برای f نامیم هرگاه برای هر $x, x' \in X$، $d(fx, fx') \leq c.d(x, x')$. پیداست که اگر تابعی دارای ثابت لیپشیتز باشد، پیوسته است. لکن هر تابع پیوسته‌ای لزوماً ثابت لیپشیتز ندارد.

اکنون دو کاتگوری زیر را در نظر بگیرید:

کاتگوری اول که اشیای آن فضاهای متریک X و Y و . . .و مرفیسم‌های آن زوج های (f, c) هستند که f یک تابع با ثابت لیپشیتز c بین دو فضای متریک است. هم‌چنین تعریف می‌کنیم: $Id_X = (Id_X, ۱)$ و $(g, c') \circ (f, c) = (gof, c'.c)$؛

و کاتگوری دوم که اشیای آن مجموعه‌های مرتب جزئی پیوسته‌اند و مرفیسم‌های آن توابع اسکات پیوسته بین این مجموعه‌ها؛ و قوانین عادی ترکیب توابع در آن برقرار است.

فانکتور B را از کاتگوری اول به کاتگوری دوم چنین تعریف می‌کنیم که فضای متریک X را به مجموعه مرتب جزئی پیوسته BX و هر $(f, c) : X \to Y$ را به $B(f, c) : BX \to BY$ با ضابطه $B(f, c)(x, r) = (fx, cr)$ برد.

---

۷ Lipschitz constant

اثبات این که $B(f,c)$ اسکات ـپیوسته است چندان دشوار نیست. نخست این‌که این تابع یکنوا است زیرا:

$$(x,r) \sqsubseteq (x',s) \Rightarrow d(x,x') \leq r-s$$

$$\Rightarrow d(fx,fx') \leq c.d(x,x') \leq cr-cs$$

$$\Rightarrow (fx,cr) \sqsubseteq (fx',cs)$$

$$\Rightarrow B(f,c)(x,r) \sqsubseteq B(f,c)(x',s)$$

دودیگر این که اگر D زیرمجموعه جهت‌داری از BX با سوپرمم (x,r) باشد، آن‌گاه یک دنباله صعودی (x_n,r_n) در D با سوپرمم (x,r) موجود است. طبق قضیه۲ـ٦ $\lim r_n = r$ و درنتیجه $\lim cr_n = cr$. حال ازآن‌جاکه $B(f,c)$ یکنواست، $B(f,c)(x,r) = (fx,cr)$ یک کران بالا برای دنباله $B(f,c)(x_n,r_n) = (fx_n,cr_n)$ است و دگرباره قضیه۲ـ٦ نشان می‌دهد که $B(f,c)(x,r) = (fx,cr)$ سوپرمم این دنباله و سوپرمم $B(f,c)(D)$ است.

کنون بینیم که $B(f,c) : BX \to BY$ چگونه با $i : X \to BX$ در تعامل است. برای هر x در X داریم: $B(f,c)(ix) = B(f,c)(x,0) = (fx,0) = i(fx)$. پس $B(f,c) \circ i = i \circ f$. یعنی اگر X و X^+ را یکی بگیریم، $B(f,c)$ در واقع f را توسیع می‌دهد.

خلاصه مطالب فوق در قضیه زیر آمده است.

◄ قضیه **(۲ـ۱۸).** با تعریف $B(f,c)(x,r) = (fx,cr)$، B یک فانکتور از کاتگوری تابع‌های دارای ثابت لیپشیتز بین فضاهای متریک به کاتگوری تابع‌های اسکات ـپیوسته بین مجموعه‌های مرتب جزئی است. این فانکتور به‌علاوه دارای این ویژگی است که برای هر تابع f با ثابت لیپشیتز c، $B(f,c) \circ i = i \circ f$.

۲.۷.۲ قضیه نقطه ثابت برای توابع انقباضی

همان‌گونه که پیش از این وعده داده بودیم، کنون به اثبات قضیه نقطه ثابت باناخ با استفاده از ابزارهای نظریه دامنه‌ای می‌پردازیم.

فرض کنید $f : X \to X$ یک تابع لیپشیتزی با ثابت لیپشیتزی $c < ۱$ باشد. آن‌گاه f را یک نگاشت انقباضی[۸] یا یک انقباض[۹] می نامیم.

◄ قضیه **(۲—۱۹).** هر تابع انقباضی روی یک فضای متریک کامل، دارای یک نقطه ثابت یکتا است که این نقطه ثابت با حدگیری از مدار[۱۰] هر نقطه دل‌خواه در فضا به‌دست می آید.

برهان . فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل و $f : X \to X$ یک نگاشت انقباضی با ثابت لیپشیتز $c < ۱$ باشد. همان‌گونه که پیش‌تر آمد، تابع $g = B(f,c) : BX \to BX$ یک تابع اسکات ـپیوسته است.

فرض کنید x یک نقطه از X باشد. قرار دهید $R_x = d(x,fx)/۱ - c$. برای هر $r \geq R_x$ داریم: $d(x,fx) \leq (۱-c)r = r - cr$ و درنتیجه $(x,r) \sqsubseteq (fx,cr) = g(x,r)$. این رابطه به‌همراه صعودی بودن g ایجاب می‌کند که تابع g، مجموعه $\uparrow (x,r)$ را در خودش بنگارد.

می‌دانیم که $\uparrow (x,r)$ یک $DCPO$ با کوچک‌ترین عنصر (x,r) است. پس طبق قضیه نقطه ثابت برای $DCPO$ ها، $(f^n x, c^n r)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله صعودی است که کوچکترین کران بالای آن (y,s)، کوچک ترین نقطه ثابت g بر $\uparrow (x,r)$ است. طبق قضیه ۲—۶، $s = \lim_{n\to\infty} c^n r = ۰$ و $y = \lim_{n\to\infty} f^n x$.

باری، $(y,s) = (y,۰)$ یک عنصر ماکزیمال در BX است، پس این نقطه نه‌تنها کوچک‌ترین که تنها نقطه ثابت g در $\uparrow (x,r)$ است.

---
۸ Contracting map
۹ Contraction
۱۰ Orbit

به‌روشنی، $(y,\circ) = (\lim_{n\to\infty} f^n x, \circ)$ از انتخاب $r \geq R_x$ مستقل است. اکنون نشان می‌دهیم که $(y,\circ)$ *تنها* نقطه ثابت g در *کل* BX است. بدین‌منظور، (z,t) را نقطه ثابت دیگری از g بپندارید. اگر $r \geq \max\{R_x, d(x,z)+t\}$، آن‌گاه (z,t) در $(x,r)\uparrow$ بوده و ازاین رو با $(y,\circ)$ برابر است.

تاکنون ثابت کرده‌ایم که $(y,\circ)$ تنها نقطه ثابت g در BX است. از دیگرسو، روشن است که $z \in X$ یک نقطه ثابت $f : X \to X$ است اگروتنهااگر $(z,\circ)$ یک نقطه ثابت $g : Bx \to BX$ باشد. بنابراین y تنها ثابت f است. $\square$

فصل ۳

معرفی یک مدل محاسباتی برای فضاهای شبه‌متریک

در این فصل برآنیم تا دامنه گوی های فرمال یک فضای شبه‌متریک را معرفی و ویژگی‌های آن را مطالعه کنیم. مطالب این فصل عموماً در [۲] یافت می‌شوند. این مقاله کوشیده است تا آن‌چه را که در فصل پیش برای فضاهای متریک گفته شد، به فضاهای شبه‌متریک تعمیم دهد. لکن همان‌گونه‌ای که خواهد آمد، کار در مورد فضاهای شبه‌متریک به نسبت فضاهای متریک با دشواری‌های بیشتری روبرو است و دنباله‌ها و حدشان به همان سهولت پیش به کار نمی‌آیند و به جای آن شبکه ها و یوندا ـحد آن‌ها استفاده می شوند.

بحث را با معرفی اجمالی فضاهای شبه‌متریک به پیش می‌بریم.

۱.۳ فضای شبه‌متریک

◄ تعریف **(۳—۱).** زوج (X,d) را در نظر بگیرید که X یک مجموعه و $d : X \times X \to [0,\infty)$ تابعی با ویژگی‌های زیر است:

۱) برای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = d(y, x) = 0$ اگروتنهااگر $x = y$.

۲) برای هر $x, y, z \in X$، $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

دراین‌صورت (X, d) را یک فضای شبه‌متریک [۱]، و d را یک شبه متریک روی X می‌خوانیم.

شبه‌متریک d روی مجموعه X توپولوژی τ_d را با پایه

$$B = \{B(a, \epsilon) : a \in X \text{ and } \epsilon \geq 0\}$$

که

$$B(a, \epsilon) = \{x \in X : d(a, x) \leq \epsilon\}.$$

ایجاد می‌کند. به‌آسانی می‌توان دید که τ_d، یک توپولوژی T_0 است. گاهی به‌جای شرط اول در تعریف فضای شبه‌متریک شرط قوی‌تر زیر آورده می‌شود:

۱) برای هر $x, y \in X$، $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$.

با شرط فوق (X, d) یک فضای شبه‌متریک T_1 است (یعنی توپولوژی مربوط به آن T_1 است).

فرض کنید فضای شبه‌متریک (X, d) داده شده باشد. مزدوج [۲] شبه‌متریک d که آن را با d^{-1} نشان می‌دهیم تابعی است که با ضابطه $d^{-1}(x, y) = d(y, x)$ تعریف می‌شود و آن هم آشکارا یک شبه‌متریک روی X است. هم چنین توپولوژی $\tau_{d^{-1}}$، توپولوژی مزدوج τ_d [۳] خوانده می‌شود.

شبه‌متریک d می‌تواند منجر به متریک $d^*(x, y) = max\{d(x, y), d(y, x)\}$ شود. توپولوژی تولید شده به وسیله d^* را توپولوژی متقارن [۴] می‌خوانیم.

◄ **تعریف (۳–۲).** فرض کنید (X, d) یک فضای شبه‌متریک است. گوییم شبکه $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ از عناصر

---

۱ Quasi metric space
۲ Conjugate
۳ Conjugate topology of τ_d
۴ Symmetric Topology

X، یک شبکه کشی[۵] است هرگاه

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \lambda_0 \quad \forall \nu \geq \mu \geq \lambda_0 \quad d(x_\mu, x_\nu) \leq \epsilon$$

گاهی برای تأکید بر این که شبه‌متریک d لزوماً متقارن نیست، شبکه کشی را شبکه کشی پیشرو یا شبکه کشی/ از چپ [۶] می‌گوییم. پیداست که به‌گونه‌ای مشابه، می‌توانیم شبکه کشی از راست یا شبکه کشی پسرو[۷] را نیز باجای‌گزین کردن $d(x_\nu, x_\mu) \leq \epsilon$ به‌جای $d(x_\mu, x_\nu) \leq \epsilon$ در تعریف فوق، تعریف کنیم. یک شبکه کشی در فضای متریک (X, d^*) را شبکه هم ـکشی[۸] می‌نامیم. به بیان روشن‌تر شبکه هم ـکشی شبکه ای مانند $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ با خاصیت زیر است:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \lambda_0 \quad \forall \nu \geq \mu \geq \lambda_0 \quad d^*(x_\mu, x_\nu) \leq \epsilon.$$

◄ **تعریف (۳—۳).** فرض کنید (X, d) یک فضای شبه‌متریک و $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ یک شبکه در آن است. $x \in X$ را یک یوندا ـحد [۹] برای شبکه $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ می‌خوانیم هرگاه برای هر $y \in X$ داشته باشیم:

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} \sup_{\delta \geq \gamma} d(x_\delta, y).$$

از تعریف بالا چنین برمی‌آید که: اولاً یوندا ـحد یک شبکه در صورت وجود یکتاست. دودیگر این‌که اگر x یوندا ـحد شبکه $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ باشد، آن‌گاه با قرار دادن $y = x$ می‌بینیم که **حد** دنباله $(d(x_\gamma, x))_{\gamma\in\Gamma}$ برابر با صفر است. به دیگربیان اگر x یوندا‌ـحد شبکه $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ باشد، آن‌گاه x به‌ویژه d^{-1} ـحد این شبکه نیز هست.

◄ **تعریف (۳—۴).** فضای شبه‌متریک (X, d) را یوندا ـکامل [۱۰] گوییم هرگاه هر شبکه کشی در آن

[۵] Cauchy Net
[۶] Forward or Left Cauchy net
[۷] Backward or Right-Cauchy net
[۸] Bi-cauchy net
[۹] Yoneda-limit
[۱۰] Yoneda- complete

دارای یک یوندا ـحد باشد. هم‌چنین (X,d) را یوندا ـکامل دنباله‌وار[۱۱] گوییم هرگاه درآن هر *دنباله کشی* دارای یوندا‌ـحد باشد.

پیداست که هر فضای شبه‌متریک یوندا‌ـکامل، یوندا ـکامل دنباله‌وار است.

◄ تعریف **(۳—۵).** فرض کنید (X,d) یک فضای شبه‌متریک باشد. نقطه $e \in X$ را متناهی [۱۲] گوییم اگرچنان‌چه برای هر شبکه کشی $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ با یوندا ـحد x داشته باشیم:

$$d(e,x) = \sup_{\gamma} \inf_{\delta\geq\gamma} d(e,x_\delta)$$

◄ تعریف **(۳—٦).** فضای شبه متریک (X,d) را:

- جبری[۱۳] نامیم هرگاه هر یک از اعضای X یوندا‌ـحد یک شبکه کشی از *عناصر متناهی* X باشد و
- اُمگا ـجبری[۱۴] نامیم هرگاه مجموعه تمام عناصر متناهی آن حداکثر شمارا باشد.

برای فضاهای شبه‌متریک، گونه دیگری از کامل بودن را نیز با نام اسمیث ـکامل[۱۵] بودن، می‌توان تعریف نمود. به‌طورکلی اسمیث ـکامل بودن برای فضاهای شبه‌یکنواخت[۱٦] تعریف می شود. لکن دراین‌جا برای وارهیدن از پیچیدگی‌های تعریف کلی، حالت خاص این تعریف برای فضاهای شبه‌متریک را آورده‌ایم تعریف کلی، با به‌کارگیری فیلترها در [۲۰] و [۱۴] و تعریف زیر با رویکرد استفاده از شبکه‌ها در [۲] آمده است.

◄ تعریف **(۳—۷).** فضای شبه متریک (X,d) را اسمیث ـکامل می‌نامیم اگر هر شبکه کشی $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$

۱۱ Sequentially yoneda-complete
۱۲ Finite
۱۳ Algebraic
۱۴ ω-algebraic
۱۵ Smyth-Completeness
۱٦ Quasi-uniform spaces

در آن قویاً همگرا[۱۷] باشد (یعنی به یک نقطه $x \in X$، d^* ـهمگرا باشد).

◄ گزاره **(۳—۸)**. فرض کنید (X, d) یک فضای شبه‌متریک اسمیث ـکامل باشد. آن‌گاه (X, d) یوندا ـکامل است و تمام عناصرش متناهی اند.

برهان . به آسانی ثابت می‌شود که اگر شبکه $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ قویاً به $x \in X$ همگرا باشد، آن‌گاه x یوندا ـحد $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ نیز هست. پس هر فضای شبه متریک اسمیث ـکامل، یوندا ـکامل است. حال یک $e \in X$ را به دل‌خواه در نظر گرفته نشان می‌دهیم متناهی است. فرض کنید $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ یک شبکه کشی همگرا به x باشد. نشان می‌دهیم که

$$d(e, x) = \sup_{\gamma\in\Gamma} \inf_{\delta\geq\gamma} d(e, x_\delta).$$

قرار دهید $T = \sup_{\gamma\in\Gamma} \inf_{\delta\geq\gamma} d(e, x_\delta)$. کنون $\epsilon > 0$ و $\gamma \in \Gamma$ را به‌طور خاص در نظر بگیرید. ازاین‌که (X, d) اسمیث ـکامل و x یوندا ـحد شبکه $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ است، نتیجه می‌شود که شبکه $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ به‌نحو قوی به x همگرا است. ازاین رو $\delta_\circ \in \Gamma$ موجود است که $\gamma \leq \delta_\circ$ و $d(x, x_{\delta_\circ}) \leq \epsilon$ و لذا

$$\inf_{\delta\geq\gamma} d(e, x_\delta) \leq d(e, x_{\delta_\circ}) \leq d(e, x) + d(x, x_{\delta_\circ}) \leq d(e, x) + \epsilon.$$

و چون انتخاب γ اختیاری بود، داریم: $T \leq d(e, x) + \epsilon$. هم‌چنین ازآن‌جاکه ϵ هم اختیاری انتخاب شده بود، نتیجه می‌شود که $T \leq d(e, x)$. با روندی مشابه با بحث فوق، نامساوی $d(e, x) \leq T$ نیز ثابت می‌شود. □

در تعریف زیر با دو نوع دیگر از کامل بودن آشنا می شویم:

◄ تعریف **(۳—۹)**. فضای شبه‌متریک (X, d) را در نظر بگیرید. آن‌گاه

[۱۷] Strongly Convergent

۱) (X,d) را K ـکامل از چپ[18] می‌خوانیم هرگاه هر شبکه کشی از چپ $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ دارای d ـحد باشد. بدین‌ترتیب (X,d) را K ـکامل از راست[19] می‌خوانیم هرگاه هر شبکه کشی از راست دارای d ـحد باشد.

۲) (X,d) را هم ـکامل[20] می‌گوییم هرگاه (X,d^*) یک فضای متریک کامل باشد (بدین معنی که هر دنباله کشی در فضای متریک (X,d^*) همگرا باشد).

هر شبکه کشی از چپ در فضای شبه‌متریک (X,d) یک شبکه کشی از راست در فضای شبه متریک (X,d^{-1}) است و برعکس. زین‌رو و بنابه آن‌چه پیش‌تر نیز آمد، اگر (X,d) یک فضای شبه‌متریک یوندا‌ـکامل باشد، هر شبکه کشی از چپ $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ در (X,d) (معادلاً هر شبکه کشی از راست $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ در $((X,d^{-1})$)، d^{-1} ـهمگراست. درنتیجه اگر (X,d) یوندا ـکامل باشد، آن‌گاه (X,d^{-1})، K ـکامل از راست است.

گزاره زیر نشان می‌دهد که هر فضای شبه‌متریک یوندا ـکامل دنباله‌وار، هم ـکامل است.

◄ گزاره **(۳—۱۰).** اگر (X,d) یک فضای شبه‌متریک یوندا ـکامل دنباله‌وار باشد، آن‌گاه (X,d) هم ـکامل است.

برهان . فرض کنید $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله d^* ـکشی باشد. دراین‌صورت این دنباله به ویژه کشی از چپ و دارای یوندا ـحد $x\in X$ است. به‌بیان‌بهتر $d(x_n,x)\to 0$. بنابراین کافی است ثابت کنیم که x به علاوه d ـحد چپ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ است، به بیان ساده‌تر باید نشان دهیم $d(x,x_n)\to 0$. بدین‌منظور $\epsilon>0$ را در نظر بگیرید. چون $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله d^* ـکشی است، عدد $N\in\mathbb{N}$ موجود است که هرگاه $m,n\geq N$،

[18] Left K-complete
[19] Right K-complete
[20] Bi-complete

$d(x_m, x_n) < \epsilon$. ازاین‌رو برای هر $n \geq N$ داریم:

$$\sup_{m \geq N} d(x_m, x_n) \leq \epsilon.$$

اما x یوندا ـحد $(x_n)_{n\in I\!N}$ است. پس برای هر $n \geq N$:

$$d(x, x_n) = \inf_{k\in I\!N} \sup_{m\geq k} d(x_m, x_n) \leq \sup_{m\geq N} d(x_m, x_n) \leq \epsilon.$$

و این نشان می‌دهد که $d(x, x_n) \to 0$ که همان مطلوب ماست. $\square$ برای روشن‌تر شدن مفاهیم فضاهای شبه‌متریک و کامل بودن آن‌ها، در زیر چند نمونه می آوریم:

◄ **مثال (۳—۱۱).** روی مجموعه اعداد حقیقی $I\!R$ شبه‌متریک d را چنین تعریف کنید:

$$d(x,y) = \begin{cases} y - x & \text{اگر } x \leq y\text{،} \\ 1 & \text{اگر } x > y \end{cases}$$

آن‌گاه توپولوژی τ_d همان توپولوژی سورجنفری[21] روی $I\!R$ است. به‌آسانی می‌توان دید که (R, d) یوندا ـکامل و T_1 و درنتیجه $(I\!R, d^{-1})$، K ـکامل از راست است. به‌علاوه، تمام نقاط در $(I\!R, d)$ متناهی‌اند.

◄ **مثال (۳—۱۲).** روی $I\!R$ شبه‌متریک d را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ گویا نباشد و } x \neq y\text{،} \\ \min\{|x-y|, 1\} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

فضای توپولوژیک $(I\!R, d)$ خط مایکل[22] نامیده می‌شود. به‌علاوه (X, d^{-1}) یک فضای شبه‌متریک K ـکامل از راست است.

◄ **مثال (۳—۱۳).** قرار دهید $X = I\!R$. برای هر $x \in X$ و $r \in I\!R$ ، گوی مماس از بالا بر خط افقی

---

[21] Sorgenfrey Topology on R
[22] Michael line

گذرنده از x در نقطه x را با $C(x,r)$ نشان دهید. شبه‌متریک d را روی X به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$d(x,y)=\begin{cases} ۱ & \text{اگر } y\notin c(x,۱)، \\ r & \text{اگر } r\leq ۱ \text{ کوچکترین عدد حقیقی مثبتی باشد که } y\in C(x,r) \\ ۰ & \text{اگر } x=y \;. \end{cases}$$

فضای (X,d) را صفحه کُفنر[۲۳] می‌نامند. درواقع برای $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ در X داریم:

$$d((x_۱,y_۱),(x_۲,y_۲))=\begin{cases} Min\{۱,\frac{(x_۲-x_۱)^۲}{۲(y_۲-y_۱)}+\frac{(y_۲-y_۱)}{۲}\} & \text{اگر } y_۱<y_۲، \\ ۱ & \text{اگر } y_۱\geq y_۲ \end{cases}$$

◄ مثال **(۳−۱۴).** فرض کنید $X=\alpha$ یک اوردینال دل‌خواه باشد. روی X شبه‌متریک زیر را تعریف کنید:

$$d(x,y)=\begin{cases} ۰ & \text{اگر } x\leq y، \\ ۱ & \text{اگر } x>y \end{cases}$$

در این مثال توپولوژی τ_d، $T_۰$ است اما $T_۱$ نیست. به‌آسانی می‌توان دید که اگر $cf(\alpha)>\aleph_۰$، آن‌گاه (X,d) یوندا ـکامل دنباله‌وار است. هم‌چنین اگر α یک اوردینال تالی باشد (X,d) یوندا‌ـکامل است.

۲.۳ فضای گوی‌های فرمال به عنوان یک مدل محاسباتی برای فضاهای شبه‌متریک

در این فصل مجموعه گوی‌های فرمال را برای یک فضای شبه متریک مورد مطالعه قرار می‌دهیم. این مجموعه در[۲] معرفی شده و می‌تواند به عنوان یک مدل محاسباتی برای فضاهای شبه‌متریک به کار آید.

[۲۳] Kofner Plane

لکن همان گونه که پیش از این نیز گفتیم، کارها در مقایسه با فضاهای متریک کمی پیچیده‌تر است.

◄ **تعریف (۳—۱۵).** فرض کنید (X,d) یک فضای شبه‌متریک باشد. فضای گوی‌های فرمال[۲۴] برای (X,d) عبارت است از زوج $(BX,\sqsubseteq)$ که:

$$BX = \{(x,r) : x \in X, r \in \mathbb{R}^+\}$$

و برای هر $(x,r),(y,s) \in BX$:

$$(x,r) \sqsubseteq (y,s) \Leftrightarrow d(x,y) \leq r - s$$

به‌آسانی می‌توان آزمود که $(BX,\sqsubseteq)$ یک مجموعه مرتب جزئی است. هر عنصر (x,r) از BX را یک گوی فرمال می‌نامیم.

در ادامه این فصل خواهیم دید که چگونه ویژگی های ترتیبی[۲۵] BX و ویژگی های توپولوژیک (X,d) به‌هم مربوطند. از آن مهم‌تر، خواهیم دید که تحت چه شرایطی برای (X,d) فضای $(BX,\sqsubseteq)$ یک $DCPO$ و تحت چه شرایطی BX یک $DCPO$ پیوسته (دامنه) است.

سخن خویش را با چند قضیه و گزاره پی می‌گیریم.

گزاره زیر نشان می‌دهد که هر زیرمجموعه جهت‌دار BX منجر به یک شبکه کشی در X می شود. یک زیرمجموعه جهت‌دارΓ از $(BX,\sqsubseteq)$ را برای سهولت به‌صورت $(x_\gamma,r_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ نشان می‌دهیم. این گزاره بیان می‌کند که مجموعه مؤلفه های اول اعضای Γ یک شبکه کشی در (X,d) است.

◄ **گزاره (۳—۱۶).** فرض کنید (X,d) یک فضای شبه‌متریک و $\Gamma = (x_\gamma,r_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ یک زیرمجموعه جهتداراز BX باشد. آن‌گاه $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ یک شبکه کشی در (X,d) است.

---
[۲۴] The space of formal balls
[۲۵] Order theoretic properties

برهان . برای هر $\alpha, \beta \in \Gamma$، اگر $(x_\beta, r_\beta) \sqsubseteq (x_\alpha, r_\alpha)$ آن‌گاه $r_\beta \leq r_\alpha$. قرار دهید $r = \inf_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma$. بدین‌سان برای هر $\epsilon \geq 0$، یک $\gamma_0 \in \Gamma$ موجود است که $r_{\gamma_0} - r \leq \epsilon$. پس برای هر α و β در Γ که $\gamma_0 \sqsubseteq \alpha \sqsubseteq \beta$ داریم:

$$d(x_\alpha, x_\beta) < r_\alpha - r_\beta < r_\alpha - r < r_{\gamma_0} - r < \epsilon$$

□

در فصل پیشین دیدیم که اگر (X, d) یک فضای متریک باشد، سوپرمم یک زیر مجموعه جهتدار BX با کمک حد یک دنباله کشی در X به‌دست می آید. در قضیه زیر می‌بینیم که در حالتی که (X, d) یک فضای شبه متریک باشد، سوپرمم یک زیرمجموعه جهت‌دار BX را یوندا ـحد یک شبکه کشی در X تعیین می‌کند.

◄ قضیه **(۳–۱۷).** فرض کنید (X, d) یک فضای شبه‌متریک و Γ یک مجموعه جهت‌دار از BX باشد. هم‌چنین فرض کنید x یوندا ـحد شبکه $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ باشد و $r = \inf_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma$. آن‌گاه داریم: $\sqcup \Gamma = (x, r)$.

برهان . در گام نخست نشان می‌دهیم که برای هر $\alpha \in \Gamma$، $d(x_\alpha, x) \leq r_\alpha - r$. این یعنی (x, r) کران بالایی برای Γ است. یک $\alpha \in \Gamma$ را به‌طور خاص در نظر بگیرید. ازآن‌جاکه x یوندا ـحد $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ است، داریم:

$$d(x, x) = \inf_\gamma \sup_{\delta \geq \gamma} d(x_\delta, x) = 0$$

اکنون $\epsilon \geq 0$ را در نظر بگیرید. بنابه عبارت فوق، $\gamma_0 \in \Gamma$ موجود است که اگر $\delta \geq \gamma_0$ آن‌گاه $d(x_\gamma, x) < \epsilon$. γ_0 و α اعضایی از مجموعه جهت‌دار Γ هستند، پس برای این‌دو کران بالای β در Γ وجود

دارد. کنون داریم:

$$d(x_\alpha, x) \leq d(x_\alpha, x_\beta) + d(x_\beta, x) \leq (r_\alpha - r_\beta) + \epsilon \leq (r_\alpha - r) + \epsilon$$

و چون ϵ اختیاری انتخاب شده‌است، عبارت بالا نتیجه می‌دهد که $d(x_\alpha, x) \leq r_\alpha - r$.

در گام دوم اثبات (y,s) را کران بالای دیگری برای Γ فرض کرده نشان می‌دهیم $(x,r) \sqsubseteq (y,s)$. چون x یوندا ـحد $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ است، داریم $d(x,y) = \inf_\gamma \sup_{\alpha\geq\gamma} d(x_\alpha, y)$ و چون (y,s) کران بالایی برای Γ است، برای هر $\alpha \in \Gamma$ داریم $d(x_\alpha, y) \leq r_\alpha - s$. بنابراین:

$$d(x,y) = \inf_\gamma \sup_{\alpha\geq\gamma} d(x_\alpha, y) \leq \inf_\gamma \sup_{\alpha\geq\gamma} (r_\alpha - s) = \inf_\gamma (r_\gamma - s) = r - s$$

یعنی $(x,r) \sqsubseteq (y,s)$.

بنابراین درمجموع در گام‌های نخست و دوم ثابت کردیم که $(x,r) = \sqcup_{\gamma\in\Gamma}(x_\gamma, r_g)$. □

دو گزاره بالا به‌آسانی به قضیه زیر می‌انجامند.

◄ **قضیه (۳—۱۸).** فرض کنید (X,d) یک فضای شبه‌متریک یوندا ـکامل باشد. آن‌گاه BX یک $DCPO$ است.

برهان . فرض کنید $\Gamma = (x_\gamma, r_\gamma)_{\gamma\in G}$ یک مجموعه جهت‌دار در BX باشد. هم‌چنین فرض کنید x یوندا‌ـحد شبکه کشی $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ در X است و $r = \inf_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma$. دراین‌صورت $(x,r) = \sqcup_{\gamma\in G}(x_\gamma, r_\gamma)$. □

در[۲] ثابت شده است که اگر (X,d) یک فضای شبه‌متریک T_1 باشد، آن گاه برای این‌که BX یک $DCPO$ شود، کافی است (X,d) یوندا ـکامل دنباله‌وار باشد.

کنون درپی آنیم که آیا کوچک‌ترین کران بالا برای یک مجموعه جهت‌دار در BX نیز به یوندا ـحد یک شبکه کشی در X می انجامد. پیش از دست‌یابی به پاسخ این پرسش، لم زیر را نیازمندیم.

◄ **لم (۳—۱۹).** فضای شبه‌متریک (X,d) را در نظر بگیرید. فرض کنید $(BX, \sqsubseteq)$ یک $DCPO$

باشد و Γ زیرمجموعه جهت‌داری از BX که $(x,r) = \sqcup\Gamma$. دراین‌صورت برای هر $t \geq \circ$، داریم $\sqcup_{\gamma\in\Gamma}(r_\gamma, x_\gamma + t) = (x, r+t)$.

برهان . قرار دهید $\Gamma_t = \{(x_\gamma, r_\gamma + t) : \gamma \in \Gamma\}$. از جهت‌دار بودن Γ نتیجه می‌شود که Γ_t نیز جهت‌دار است و ازاین‌که (x,r) کوچک‌ترین کران بالا برای Γ است نتیجه می‌شود که $(x, r+t)$ یک کران بالا برای Γ_t است. حال فرض کنید (y,s) کران بالای دیگری برای Γ_t باشد. به‌آسانی می‌توان دید که $(y, s-t)$ کران بالایی برای Γ است و بدین‌ترتیب $(x,r) \sqsubseteq (y, s-t)$. پس $d(x,y) \leq r-(s-t)$ و $(x, r+t) \sqsubseteq (y,s)$. یعنی $(x, r+t)$ کوچک‌ترین کران بالای Γ_t است. □

◄ قضیه **(۳—۲۰).** فرض‌کنید $(BX, \sqsubseteq)$ یک $DCPO$ و Γ زیرمجموعه جهت‌داری از BX باشد که $(x,r) = \sqcup\Gamma$. دراین‌صورت $r = \inf_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma$ و x یوندا ـحد $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ است.

برهان . قرار دهید $t_\circ = \inf_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma$. مجموعه $\{(x_\gamma, r_\gamma - t_\circ) : \gamma \in G\}$ زیرمجموعه جهت‌داری از BX است. ازآن‌جاکه $(BX, \sqsubseteq)$ یک $DCPO$ است، $(y,s) \in BX$ پیدا می‌شود که $\sqcup_{\gamma\in\Gamma}(x_\gamma, r_\gamma - t_\circ) = (y,s)$. ازاین‌رو به ازای هر $\gamma \in \Gamma$ داریم $s \leq r_\gamma - t_\circ$. پس

$$s \leq \inf_{\gamma\in\Gamma}(r_\gamma - t_\circ) = \inf_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma - t_\circ = \circ.$$

بنابراین $s = \circ$ و $\sqcup_{\gamma\in\Gamma}(x_\gamma, r_\gamma - t_\circ) = (y, \circ)$ و طبق لم قبل $\sqcup_{\gamma\in\Gamma}(x_\gamma, r_\gamma) = (y, t_\circ)$. درنتیجه $x = y$ و $r = t_\circ = \inf_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma$. اکنون باید نشان‌دهیم که x یوندا ـحد $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ است یعنی برای هر $y \in X$ داریم:

$$d(x,y) = \inf_{\gamma}\sup_{\delta\geq\gamma} d(x_\delta, y).$$

عنصر $y \in X$ را به دل‌خواه در نظر گرفته قراردهید $t = \inf_\gamma \sup_{\delta \geq \gamma} d(x_\delta, y)$. درادامه نشان می‌دهیم که $d(x,y) = t$. بدین منظور، نخست ثابت می‌کنیم که برای هر $\epsilon \geq 0$ داریم $t \leq \epsilon + d(x,y)$ و از آن نتیجه می‌گیریم که $t \leq d(x,y)$. گفتیم $r = \inf_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma$، پس برای هر $\epsilon > 0$ می‌توان $\gamma_0 \in \Gamma$ را چنان یافت که $r_{\gamma_0} - r < \epsilon$. به ازای هر $\delta \geq \gamma_0$ داریم $(x_\delta, r_\delta) \sqsubseteq (x,r)$؛ پس:

$$d(x_\delta, x) \leq r_\delta - r \leq r_{\gamma_0} - r < \epsilon$$

و

$$d(x_\delta, y) \leq d(x_\delta, x) + d(x,y) < \epsilon + d(x,y)$$

بنابراین

$$\sup_{\delta \geq \gamma_0} d(x_\delta, y) \leq \epsilon + d(x,y)$$

و

$$t = \inf_\gamma \sup_{\delta \geq \gamma} d(x_\gamma, x) \leq \sup_{\delta \geq \gamma_0} d(x_\delta, y) \leq \epsilon + d(x,y)$$

که چون ϵ اختیاری است نتیجه می‌دهد که $t \leq d(x,y)$.

اکنون برای اثبات $d(x,y) \leq t$ کافی عبارتی معادل آن یعنی $(x, r+t) \sqsupset (y,r)$ شود. پیش‌ازاین اشاره شد که:

$$(x, r+t) = \sqcup \Gamma_t = \{(x_\alpha, r_\alpha + t) : \alpha \in \Gamma\}$$

پس کافی است برای هر $\alpha \in \Gamma$ داشته‌باشیم $(x_\alpha, r_\alpha + t) \sqsubseteq (y,r)$. برای برآوردن این هدف، برای هر $\epsilon \geq 0$ نشان می‌دهیم که:

$$d(x_\alpha, y) \leq (r_\alpha + t) - r + \epsilon.$$

یک $\epsilon > 0$ را در نظر بگیرید. گفتیم که $t = \inf_\gamma \{\sup_{\delta \geq \gamma} d(x_\delta, y)\}$. پس $\gamma_0 \in G$ وجود دارد که $\sup_{\delta \geq \gamma_0} d(x_\delta, y) < t + \epsilon$. یعنی برای هر $\delta \geq \gamma_0$، $d(x_\delta, y) < t + \epsilon$. حال فرض کنید δ_0 کران بالایی

برای δ و α در Γ باشد. داریم:

$$d(x_\alpha, y) \leq d(x_\alpha, x_{\delta_\circ}) + d(x_{\delta_\circ}, y) \leq (r_\alpha - r_{\delta_\circ}) + (t+\epsilon) \leq (r_\alpha - r) + (t+\epsilon)$$

که خواسته ما را برآورده می‌سازد. □

در فصل پیش دیدیم که اگر (X,d) یک فضای متریک باشد، آن‌گاه (X,d) کامل است اگروتنهااگر BX یک $DCPO$ باشد. همان‌گونه که در قضیه۳—۱۸ دیدیم، اگر (X,d) یک فضای شبه‌متریک یوندا ـکامل باشد، آن گاه BX یک $DCPO$ است. لکن اگر BX یک $DCPO$ باشد، تاکنون نمی دانیم که آیا (X,d) لزوماً یوندا ـکامل است یا خیر و بهترین نتیجه‌ای که برای این حالت در مقاله[۲] داریم این است که (X,d) یوندا ـکامل دنباله‌وار است. به بیان دقیق تر همان‌گونه که درقضیه۳—۱۶ دیدیم، اگر X یک فضای شبه‌متریک باشد، هر زیرمجموعه جهت‌دار BX منجر به یک شبکه کشی در X می شود.اما سوال این‌جاست که آیا برای هر شبکه کشی $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ یک شبکه $(r_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ در $\mathbb{R}$ یافت می‌شود که $(x_\gamma, r_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ زیرمجموعه جهت‌داری از BX باشد. واین سوال تاکنون بی پاسخ مانده است.

به‌هرصورت می‌توانیم مشابه کار عدالت و هکمن در[۱۱] برای فضاهای متریک، از یک دنباله کشی در فضای شبه‌متریک (X,d) نیز به یک زیرمجموعه جهت‌دار از BX برسیم و از $DCPO$ بودن BX یوندا ـکامل بودن دنباله وار (X,d) را نتیجه بگیریم. این کار در [۲] انجام شده است.

◄ **لم (۳—۲۱).** فرض کنید $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله کشی در فضای شبه‌متریک (X,d) باشد. آن‌گاه $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ زیردنباله‌ای چون $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ دارد که $((x_{n_k}, ۲^{-k}))_{k\in\mathbb{N}}$ یک دنباله صعودی در BX است.

برهان . ازآن‌جاکه $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ کشی است، دنباله صعودی $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ را از اعضای $\mathbb{N}$ می‌توان یافت که $d(x_{n_k}, x_{n_{K+1}}) \leq ۲^{-(k+1)} = ۲^{-k} - ۲^{-(k+1)}$. یعنی $(x_{n_k}, ۲^{-k})$ دنباله‌ای صعودی است. □

◄ **قضیه (۳—۲۲).** فرض‌کنید BX یک $DCPO$ باشد. آن‌گاه (X,d) یوندا ـکامل دنباله‌وار است.

برهان . فرض‌کنید $(x_n)_{n\in I\!N}$ دنباله‌ای کشی در (X,d) باشد، نشان می‌دهیم که این دنباله دارای یک یوندا ـحد است. دنباله (x_{n_k}, r_{n_k}) را همان دنباله صعودی در اثبات لم پیش بگیرید. ازآن‌جاکه BX یک $DCPO$ است، این دنباله دارای کوچک‌ترین کران بالای (x,r) می‌باشد. طبق قضیه۳—۲۰ ، $r=0$ و x یوندا ـحد دنباله $(x_{n_k})_{k\in I\!N}$ است. اکنون نشان می‌دهیم x یوندا ـحد دنباله $(x_n)_{n\in I\!N}$ است. و بدین‌منظور $y\in X$ دل‌خواه را در نظر گرفته نشان می دهیم $d(x,y)=\inf_m \sup_{n\geq m} d(x_n,y)$. ازاین‌که x یوندا ـحد $(x_{n_k})_{k\in I\!N}$ است، نتیجه می‌شود که $d(x_{n_k},x)\to 0$ و چون $(x_n)_{k\in I\!N}$ کشی است $d(x_n,x)\to 0$. لذا $\inf_m \sup_{n\geq m} d(x_n,x)=0$. به‌علاوه:

$$d(x,y)=\inf_m \sup_{k\geq m} d(x_{n_k},y)\leq \inf_m \sup_{n\geq m} d(x_n,y)$$

و

$$\inf_m \sup_{n\geq m} d(x_n,y)\leq \inf_m \sup_{n\geq m} (d(x_n,x)+d(x,y))\leq \inf_m \sup_{n\geq m} d(x_n,x)+d(x,y)=d(x,y)$$

پس

$$d(x,y)=\inf_m \sup_{n\geq m} d(x_n,y)$$

که مطلوب ماست . □

پیش‌تردیدیم که اگر (X,d) یک فضای متریک باشد، آن‌گاه برای هر (x,r) و (y,s) در BX داریم:

$$(x,r)\ll (y,s)\Leftrightarrow d(x,y)<r-s.$$

در ادامه رابطه $\ll$ در BX را برای حالتی که (X,d) یک فضای شبه‌متریک باشد بررسی می کنیم.

◄ گزاره **(۳—۲۳).** فرض کنید (X,d) یک فضای شبه‌متریک باشد و (x,r) و (y,s) دو گوی فرمال در BX باشند. دراین‌صورت اگر $(x,r)\ll (y,s)$ آن‌گاه $d(x,y)<r-s$. درجهت‌عکس اگر (X,d) یوندا ـکامل و x یک نقطه متناهی از X باشد، آن‌گاه از $d(x,y)<r-s$ نتیجه می‌شود که $(x,r)\ll (y,s)$.

برهان . فرض کنید $(x,r) \ll (y,s)$. مجموعه $\Gamma = \{(y, s+1/n) : n \in I\!\!N\}$ جهت‌دار است و $\sqcup\Gamma = (y,s)$. بنابراین $n \in I\!\!N$ موجوداست که $(x,r) \sqsubseteq (y, s+1/n)$ یعنی $d(x,y) \leq r-s-1/n$ و درنتیجه $d(x,y) < r-s$.

برای جهت عکس فرض کنید (X,d) یوندا ـکامل و x یک نقطه متناهی از X باشد. هم‌چنین فرض‌کنید (x,r) و (y,s) در BX به‌گونه‌ای باشند که $d(x,y) < r-s$. آن‌گاه $\epsilon > 0$ موجوداست که $d(x,y) < (r-s) - 2\epsilon$. اکنون Γ رامجموعه جهت‌داری بگیرید که

$$(y,s) \sqsubseteq \sqcup\Gamma = (z,t)$$

در ادامه گوی (x_α, r_α) را در Γ چنان می‌یابیم که $(x,r) \sqsubseteq (x_\alpha, r_\alpha)$ و به‌تبع آن $(x,r) \ll (y,s)$. طبق فرض، X یوندا ـکامل است؛ پس BX یک $DCPO$ است و طبق گزاره ۳—۲۰ و قضیه ۳—۱۶، $t = \inf_{\alpha\in\Gamma} t_\alpha$ و $(z_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ یک شبکه کشی با یوندا ـحد z است. از متناهی بودن x نتیجه می‌شود که

$$d(x,z) = \sup_\gamma \inf_{\alpha\geq\gamma} d(x, z_\alpha).$$

پس:

$$\forall\gamma \quad \exists\alpha \geq \gamma \quad [d(x,z_\alpha) \leq d(x,z) + \epsilon]$$

هم‌چنین $t = \inf_{\alpha\in G} t_\alpha$ نتیجه می‌دهد که

$$\exists\gamma \quad \forall\alpha \geq \gamma \quad [0 \leq t_\alpha - t \leq \epsilon]$$

کنون $\alpha \in \Gamma$ را به‌گونه‌ای برمی‌گزینیم که $d(x,z_\alpha) \leq d(x,z) + \epsilon$ و $t_\alpha - t \leq \epsilon$. و با چنین گزینشی داریم:

$$d(x,z_\alpha) \leq d(x,z)+\epsilon \leq d(x,y)+d(y,z)+\epsilon \leq (r-s)-2\epsilon+(s-t)+\epsilon \leq r-\epsilon-t_\alpha+\epsilon = r-t_\alpha$$

یعنی $(x,r) \sqsubseteq (z_\alpha, t_\alpha)$ که نیاز مارا فراهم می‌آورد. □

◄ نکته **(۳—۲۴).** شرط متناهی بودن x برای جهت عکس قضیه فوق لازم است. برای توجیه این

امر می‌توان به مثال هکمن[۲۶] که در [۲] آمده‌است، مراجعه نمود.

◄ قضیه **(۳—۲۵).** اگر (X,d) یک فضای شبه‌متریک یوندا ـکامل جبری باشد، آن‌گاه BX یک $DCPO$ پیوسته است.

برهان . بنابر قضیه ۳—۱۸، BX یک $DCPO$ است. پس تنها کافی است نشان‌دهیم BX پیوسته است. بدین‌منظور نشان می‌دهیم که

$$B = \{(e,r) : \text{ و } e \text{ یک نقطه متناهی است } \; r \in Q^+\}$$

پایه‌ای برای BX است. عنصر $(y,s) \in BX$ را در نظر گرفته نشان می‌دهیم

$$D_{(y,s)} = \{(e,r) \in BX : d(e,y) \le r - s\}$$

زیرمجموعه جهت‌داری از BX است که $\sqcup D_{(y,s)} = (y,s)$. ازآن‌جاکه (X,d) جبری است، شبکه کشی $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ از نقاط متناهی X با یوندا ـحد آن y یافت می‌شود، پس $D_{(y,s)}$ ناتهی است. فرض کنید $(e_۱,r_۱)$ و $(e_۲,r_۲)$ دو عنصر در $D_{(y,s)}$ باشند. e_iها$(i=۱,۲)$ متناهی‌اند، ازاین‌رو:

$$d(e_i,y) = \sup_\gamma \inf_{\delta\ge\gamma} d(e_i,e_\delta) < r_i - s.$$

$\epsilon > ۰$ را چنان برگزینید که

$$d(e_i,y) \le r_i - s - ۲\epsilon$$

بنابراین

$$\forall\gamma \quad \exists\delta_i \ge \gamma \quad [d(e_i,e_{\delta_i}) \le r_i - s - \epsilon] \qquad (*)$$

---
[۲۶] R. Heckman

به‌علاوه ازآن‌جا که $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ یک شبکه کشی با یوندا ـحد y است، γ_0 ای موجود است که

$$\forall \gamma_2 \geq \gamma_1 \geq \gamma_0 \quad [d(e_{\gamma_1}, e_{\gamma_2}) < \epsilon/2]$$

و

$$\forall \gamma \geq \gamma_0 \quad [d(e_\gamma, y) < \epsilon/4].$$

طبق $(*)$ می‌توان $\delta_1, \delta_2 \geq \gamma_0$ را به‌گونه‌ای برگزید که

$$d(e_1, e_{\delta_1}) \leq r_1 - s - \epsilon$$

و

$$d(e_2, e_{\delta_2}) \leq r_2 - s - \epsilon$$

اکنون اگر $\gamma \geq \delta_1, \delta_2$ آن‌گاه

$$d(e_1, e_\gamma) \leq d(e_1, e_{\delta_1}) + d(e_{\delta_1}, e_\gamma) \leq (r_1 - s - \epsilon) + \epsilon/2 = r_1 - s - \epsilon/2$$

و به‌گونه‌ای مشابه

$$d(e_2, e_\gamma) \leq r_2 - s - \epsilon/2$$

حال به‌آسانی می‌توان دید که $(e_1, r_1), (e_2, r_2) \ll (e_\gamma, s + \epsilon/4) \ll (y, s)$. و اگر r' یک عدد گویا بین s و $s + \epsilon/4$ باشد:

$$(e_1, r_1), (e_2, r_2) \ll (e_\gamma, r') \ll (y, s).$$

یعنی $D_{(y,s)}$ جهت‌دار است. کنون نشان می‌دهیم که $\sqcup D_{(y,s)} = (y, s)$. روشن است که (y, s) کران بالایی برای $D_{(y,s)}$ است. عنصر (z, t) را کران بالای دیگری برای $D_{(y,s)}$ بگیرید. چون (X, d) جبری است، شبکه کشی $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ از نقاط متناهی X با یوندا ـحد y موجود است. بنابراین برای هر $\epsilon > 0$ یک

$\gamma_\circ \in \Gamma$ وجود دارد که اگر $\gamma \geq \gamma_\circ$، آن‌گاه $d(e_\gamma, y) < \epsilon$. اگر $s+\epsilon$ گویا باشد آن‌گاه $(e_\gamma, s+\epsilon) \in D_{(y,s)}$ و $(z,t) \sqsubseteq (e_\gamma, s+\epsilon)$ یعنی $d(e_\gamma, y) \leq s+\epsilon-t$. بدین‌سان:

$$d(y,z) = \inf_{\gamma} \sup_{\delta \geq \gamma} d(e_\delta, z) = \inf_{\gamma \geq \gamma_\circ} \sup_{\delta \geq \gamma} d(e_\delta, z) \leq s-t+\epsilon.$$

ϵ می‌تواند به‌اندازه دل‌خواه به صفر نزدیک باشد، پس عبارت فوق نتیجه می‌دهد که $d(y,z) \leq s-t$ یعنی $(z,t) \sqsubseteq (y,s)$. □

حاصل مباحث فوق، نتیجه زیر است:

◄ **نتیجه (۳−۲۶).**

۱) فرض کنید (X,d) یک فضای شبه‌متریک باشد که تمام عناصرش متناهی‌اند. دراین‌صورت BX یک $DCPO$ پیوسته است و برای هر (x,r) و (y,s) در BX داریم:

$$(x,r) \ll (y,s) \Leftrightarrow d(x,y) < r-s.$$

۲) اگر BX یک فضای شبه‌متریک اسمیث ـکامل باشد، آن‌گاه BX یک $DCPO$ پیوسته است.

۳.۳ قضیه نقطه ثابت برای فضاهای شبه متریک

اگر (X,d) یک فضای شبه‌متریک باشد، به‌سان آن‌چه که برای فضاهای متریک گفتیم، تابع $f: X \to X$ را یک نگاشت انقباض [۲۷] نامیم هرگاه یک ثابت $\circ \leq c < ۱$ موجود باشد که

$$\forall x, y \in X \quad [d(f(x), f(y)) \leq c d(x,y)].$$

[۲۷] Contractiom Map

در آخرین قضیه این بخش به بررسی قضیه نقطه ثابت برای یک انقباض روی یک فضای شبه‌متریک می‌پردازیم:

◄ قضیه **(۳—۲۷).** فرض کنید (X,d) یک فضای شبه‌متریک یوندا ـکامل و $f : X \to X$ یک نگاشت انقباض باشد. آن‌گاه f نقطه ثابت یکتا دارد.

برهان . فرض کنید $0 \leq c < 1$ چنان باشد که برای هر $x,y \in X$ داشته باشیم $d(f(x),f(y)) \leq cd(x,y)$. چون (X,d) یوندا ـکامل است، BX یک $DCPO$ است. هم‌چنین تابع $f' : BX \to BX$ ($(x,r) \to (f(x),cr)$) یک تابع صعودی است. برای هر $(x,r) \in BX$ و $r \geq d(x,f(x))/(1-c)$ می‌توان بررسی کرد که $\uparrow (x,r)$ یک $DCPO$ با مینی‌موم (x,r) است و f' مجموعه $\uparrow (x,r)$ را به درون خودش می نگارد. حال طبق قضیه نقطه ثابت تارسکی، تابع $f' : (\uparrow (x,r)) \to (\uparrow (x,r))$ دارای نقطه ثابتی چون (y,s) است. لذا $f'(y,s) = (f(y),s) = (y,s)$ و درنتیجه $f(y) = y$. یعنی y نقطه ثابتی برای f است. □

۴.۳ دامنه کارا برای فضاهای شبه‌متریک

◄ تعریف **(۳—۲۸).** دنباله (x_n) از اعداد حقیقی را *محاسبه‌پذیر از راست* گوییم هرگاه یک دنباله محاسبه‌پذیر دوتایی (r_{nk}) از اعداد گویا موجود باشد که برای هر k و n:

$$(r_{nk} - x_n) \leq 2^{-k}$$

◄ تعریف **(۳—۲۹).** (فضای شبه‌متریک راست ـبازگشتی) سه‌تایی (X,d,α) را یک فضای

شبه‌متریک راست ـبازگشتی گوییم هرگاه

۱) $d : X \times X \to R$ یک شبه‌متریک روی X باشد،

۲) $\alpha : \mathbb{N} \to X$ چنان باشد که $Y = \alpha(N) \subseteq X$ نسبت به متریک d^* در X چگال شود،

۳) $d \circ (\alpha \circ \alpha) : \mathbb{N}^۲ \to R$ یک دنباله محاسبه‌پذیر از راست در اعداد حقیقی باشد.

◄ **قضیه (۳—۳۰).** فرض کنید (X, d, α) یک فضای شبه‌متریک یوندا ـکامل و جبری باشد که راست ـبازگشتی است و تمام عناصر آن متناهی‌اند. آن‌گاه دامنه BX کارا است.

برهان . در[۲] ثابت شده که BX یک دامنه ω ـپیوسته با پایه $D = \{(e, r) : e \in \alpha(\mathbb{N}), r \in Q\}$ است. پس تنها باید BX نسبت به یک شمارش مناسب برای D، کارا باشد. دنباله $d \circ \alpha \circ \alpha : \mathbb{N}^۲ \to \mathbb{R}$ را با d_{mn} نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم که α_{mnk} همان دنباله محاسبه‌پذیر تعریف ۳—۲۹ باشد. پس می‌توانیم D را به شکل زیر بشماریم.

$$D' = \{(e_n, r_m) : e_n = \alpha(n) \text{ و } r_m \text{ شمارشی برای } Q \text{ است}\}$$

اکنون نشان می‌دهیم که BX نسبت به این شمارش، کارا است. داریم :

$$(e_n, r_m) \ll (e_{n'}, r_{m'}) \Leftrightarrow d(e_n, e_{n'}) < r_m - r_{m'}) \Leftrightarrow \exists s \; [(d_{nn's} < r_m - r_{m'}) \wedge \; (d_{nn's} \geq d_n n')]$$

عبارت $d_{nn's} \geq d_{nn'}$ همیشه برقرار است پس جمله آخر را می توان به شکل $\exists s[(d_{nn's} < r_m - r_{m'}) < r_m - r_{m'}]$ بازنوشت. این عبارت به شکل $\exists sR$ است (و R محاسبه‌پذیراست)

پس طبق قضیه فرم نرمال، عبارت یادشده، کارا است. □

◄ لم (۳—۳۱). فرض کنید M یک زیرمجموعه جهت‌دار از BX باشد و $s = \sup M$. درآن‌صورت یک دنباله صعودی x_n از اعضای M موجود است که sup آن با $\sup M$ یکی است.

لم فوق کاملاً مشابه لم ۲—۳ ثابت می‌شود.

◄ لم (۳—۳۲). فرض کنید X یک فضای شبه‌متریک باشد و BX یک $DCPO$ پیوسته با یک پایه شمارای D. درآن‌صورت مجموعه $A = \{x \in X : \exists r(x,r) \in D\}$ یک زیرمجموعه شمارای X است که نسبت به توپولوژی d^{-1} در X چگال است. هم‌چنین مجموعه $S = \{r : \exists x \in X(x,r) \in D\}$ همان Q است.

برهان. نشان می‌دهیم هر عنصر $y \in X$، d^{-1}ـحد یک دنباله x_n از اعضای A است. فرض کنید $y \in X$. در آن‌صورت $(y, 0) \in BX$. ازآن‌جا که D پایه‌ای برای BX است، $D \cap (y, 0) \Downarrow$ شامل یک زیرمجموعه جهت‌دار BX با سوپرمم $(y, 0)$ است. طبق لم ۳—۳۱، دنباله صعودی (x_n, r_n) از اعضای D موجود است که سوپرمم آن $(y, 0)$ است. چون (x_n, r_n) جهت‌دار است، y یوندا ـحد x_n و لذا d^{-1}ـحد آن است. قسمت دوم نیز به نحو مشابه ثابت می شود. □

◄ تعریف (۳—۳۳). BX را قویاً کارا گوییم هرگاه $idle(BX, \sqsubseteq, \ll)$ یک دامنه کارا باشد.

◄ تعریف (۳—۳۴). فضای شبه‌متریک (X, d, α) را قویاً بازگشتی گوییم هرگاه دارای یک زیرمجموعه چگال شمارای Y باشد که دنباله دوتایی $d(a_m, a_n)$ از اعضای Y یک دنباله محاسبه‌پذیر است.

◄ قضیه (۳—۳۵). اگر (X, d, α) یک فضای شبه‌متریک قویاً کارا باشد، آن‌گاه BX قویاً کارا است.

برهان . نشان می‌دهیم که مجموعه

$$A = \{\Downarrow (y,s) : y \in Y \text{ و } s \in Q\}$$

یک پایه شمارا برای $idle(BX)$ است که نسبت به آن کارا است. فرض کنید I یک ایده‌آل مدور باشد. می‌توان آزمود که $I = \cup_{(x,r)\in I} \Downarrow (x,r)$. فرض کنید $(z,t) \ll (x,r)$. بنابر خاصیت درون‌یابی، عنصر (y,s) یافت می شود که

$$(z,t) \ll (y,s) \ll (x,r) \quad (*)$$

زین‌روی $\epsilon > ۰$ یافت می‌شود که

$$d(z,y) < t - s - \epsilon$$

و

$$d(y,x) < s - r - \epsilon.$$

ازآن‌جاکه Y در X چگال است عنصر $y' \in Y$ موجود است که $d^*(y,y') < \epsilon/۲$. پس:

$$d(z,y') < d(z,y) + d(y',y) < t - s - \epsilon + \epsilon/۲ = t - s - \epsilon/۲$$

و

$$d(y',x) < d(y',y) + d(y,x) < s - r - \epsilon + \epsilon/۲ = s - r - \epsilon/۲$$

بدین‌سان در رابطه $(*)$ می‌توانیم y را در Y در نظر بگیریم. با بحثی مشابه می‌بینیم که می‌شود s را در Q در نظر گرفت. درنتیجه هر $\Downarrow (x,r)$ را می‌توان به‌صورت اجتماعی از $\Downarrow (y,s)$ ها که $y \in Y$ و $s \in Q$ نوشت. بدین‌ترتیب $I = \cup_{(x,r)\in I} \Downarrow (x,r) = \cup_{(y,s)\in J} \Downarrow (y,s)$ که J به‌گونه‌ای که در بالا بیان شد، پیدا می شود. کنون نشان می‌دهیم که مجموعه $B = \{\Downarrow (y,s) : (y,s) \in J\}$ زیرمجموعه جهت‌داری از از A است. ازآن‌جا که $\ll$ یک رابطه تقریب زننده[۲۸] است، کافی است

[۲۸] Approximating relation

نشان دهیم J نسبت به این رابطه، جهت‌دار است. عناصر $(y_۱, s_۱)$ و $(y_۲, s_۲)$ را در J در نظر بگیرید. بنابه تعریف J، عناصر $(x_۱, r_۱)$ و $(x_۲, r_۲)$ در I موجود است که $(x_۱, r_۱) \ll (y_۱, s_۱)$ و $(x_۲, r_۲) \ll (y_۲, s_۲)$. بنابه جهت‌داری I داریم: $(x_۱, r_۱), (x_۲, r_۲) \ll (x_۳, r_۳)$ و وبنابه خاصیت درون‌یابی: $(x_۱, r_۱), (x_۲, r_۲) \ll (x_۴, r_۴) \ll (x_۳, r_۳)$. به‌گونه‌ای که در بالا نشان دادیم: عنصر $(y_۳, s_۳)$ چنان یافت می‌شود که $(x_۱, r_۱), (x_۲, r_۲) \ll (x_۴, r_۴) \ll (y_۳, s_۳) \ll (x_۳, r_۳)$. درنتیجه: $(y_۱, s_۱), (y_۲, s_۲) \ll (y_۳, s_۳) \in J$ و J جهت‌دار است. کنون تنها مانده که نشان دهیم $Idle(BX)$ نسبت به شمارشی از A کارا است. دگرباره به علت جهت‌دار بودن $\ll$ داریم:

$$\Downarrow (y, s) \ll \Downarrow (y', s') \Leftrightarrow (y, s) \ll (y', s') \Leftrightarrow d(y, y') < s - s'.$$

ومشابه قضیه پیش، ادعای دوم این سوال ثابت می شود. $\square$

فصل ۴

معرفی یک مدل محاسباتی برای فضاهای متریک مخروطی

در این فصل، می‌خواهیم آن‌چه را که تاکنون برای دامنه گوی‌های فرمال فضاهای متریک و شبه‌متریک گفتیم، در مورد فضاهای متریک مخروطی نیز بیازمائیم. آیا از یک فضای متریک مخروطی هم می‌توان به یک مجموعه مرتب جزئی و یا یک دامنه رسید؟ اگر آری، آیا می‌توان قضایای نقطه ثابت را برای فضاهای متریک از قضیه نقطه ثابت تارسکی روی این دامنه به دست آورد؟ پیش از پاسخ دادن به این پرسش ها، نخست فضای متریک مخروطی را معرفی می‌کنیم.

ایده اصلی این فضا که نخستین بار در [۱٦] معرفی شد، جای‌گزین نمودن یک فضای باناخ دل‌خواه به‌جای $I\!R$ در تعریف فضاهای متریک است.

۱.۴ فضای متریک مخروطی

◄ تعریف (۴—۱). فرض کنید E یک فضای باناخ و P زیرمجموعه‌ای از آن باشد. اگر P شرایط

زیر را داشته باشد به آن یک مخروط[1] می‌گوییم.

۱) $P \neq \{0\}$ و $P \neq \Phi$ و P در E بسته است.

۲) برای هر $x, y \in P$ و $a, b \in R$ که $a, b \geq 0$، $ax + by \in P$.

۳) اگر $x, -x \in P$، آن‌گاه $x = 0$.

وقتی P یک مخروط در فضای باناخ E باشد، آن‌را با زوج (E, P) نشان می‌دهیم. به‌علاوه روی E ترتیب جزئی $\leq$ را به‌سان زیرتعریف می‌کنیم

$$x \leq y \leftrightarrow y - x \in P.$$

به‌علاوه اگر $y - x \in IntP$ می‌نویسیم $x \ll y$. (E, P) را *منظم* [2] گوییم هرگاه برای هر دنباله‌صعودی و ازبالاکران‌دار (و یا هر دنباله نزولی و از پایین کران دار) $\{x_n\}$، عنصر $x \in E$ موجود باشد که $||x_n - x|| \to 0 (n \to \infty)$. هم چنین مخروط P را نرمال گوییم اگرچنان‌چه یک ثابت $K > 0$ موجود باشد که برای هر $x, y \in E$،

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow ||x|| \leq K||y||$$

لازم به ذکر است که یک مخروط منظم، نرمال نیز هست.

◄ **تعریف (۴—۲).** فرض کنید (E, P) یک مخروط، X یک مجموعه ناتهی، و $d : X \times X \to E$ نگاشتی با ویژگی‌های زیر باشد.

۱) برای هر $x, y \in X$، $d(x, y) \geq 0$، هم‌چنین $d(x, y) = 0$ اگروتنهااگر $x = y$.

۲) $d(x, y) = d(y, x)$ برای هر $x, y \in X$.

---
[1] Cone
[2] Regular

۳) برای هر $x,y,z \in X$، $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

دراین‌صورت می‌گوییم نگاشت d یک متریک مخروطی[۳] روی X است. به‌علاوه، (X,E,P,d) را یک فضای متریک مخروطی[۴] می‌نامیم و اگر ابهامی نباشد آن را با (X,E,P) نشان می دهیم.

درادامه، اغلب از بیان جمله «فرض کنید (X,E,P) یک فضای متریک مخروطی باشد.» صرف‌نظر کرده‌ایم.

◄ تعریف **(۴−۳).** فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی باشد. دنباله (x_n) و عنصر x را در X در نظر بگیرید. گوییم (x_n) به x همگرا است و می‌نویسیم: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ یا $x_n \to x$ $(n\to\infty)$، هرگاه برای هر $c \in E$ که $c \gg 0$، عدد $N \in I\!N$ موجود باشد که برای هر $n > N$، $d(x_n,x) \ll c$.

◄ لم **(۴−۴).** فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی و $P \subseteq E$ یک مخروط نرمال با ثابت نرمال K باشد. هم‌چنین فرض کنید (x_n) دنباله‌ای در X باشد. آن‌گاه x_n به عنصر x همگراست اگروتنهااگر $d(x_n,x) \to 0$ $(n\to\infty)$

برهان . فرض کنید دنباله (x_n) با توپولوژی متریک مخروطی به x همگرا است. برای هر $\epsilon \in I\!R$ مثبت یک $c \in E$ را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $c \gg 0$ و $K\|c\| < \epsilon$. حال $N \in I\!N$ موجود است که برای هر $n > N$ داریم $d(x_n,x) \ll c$. پس برای هر $n > N$: $\|d(x_n,x)\| \leq K\|c\| < \epsilon$ و این یعنی $d(x_n,x) \to 0$ $(n\to\infty)$

درجهت‌عکس فرض کنید $d(x_n,x) \to 0$ وقتی $n\to\infty$. عناصر $c \in E$ و $c \gg 0$ را در نظر بگیرید. دراین‌صورت $\delta > 0$ موجود است که اگر $\|x\| < \delta$ آن‌گاه $c - x \in intP$. هم‌چنین $N \in I\!N$ موجود است

[۳] Cone metric
[۴] Cone Metric Space

که هرگاه $n > N$ داریم $||d(x_n,x)|| < \delta$. بنابراین $c - d(x_n,x) \in IntP$ یعنی $d(x_n,x) \ll c$. پس (x_n) با توپولوژی متریک مخروطی به x همگراست. □

◄ **لم (۴—۵).** فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی و $P \subseteq E$ یک مخروط نرمال با ثابت نرمال K باشد. دراین‌صورت هر دنباله همگرای (x_n) در X، حد یکتایی دارد.

برهان . فرض کنید x_n همگرا به x و y باشد. آن‌گاه برای هر $c \in E$ که $c \gg 0$، یک $N \in I\!N$ یافت می‌شود که برای هر $n > N$، $d(x_n,x) \ll c$ و $d(x_n,y) \ll c$. کنون داریم:

$$d(x,y) \leq d(x_n,x) + d(x_n,y) \leq 2c$$

و نرمال بودن P نتیجه می‌دهد: $||d(x,y)|| \leq 2K||c||$. ازآن‌جاکه انتخاب c اختیاری است، $d(x,y) = 0$ و لذا $x = y$. □

◄ **تعریف (۴—۶).** (دنباله کشی در فضای متریک مخروطی) فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی و (x_n) دنباله‌ای در X باشد. اگر برای هر $c \in E \gg 0$ یک $N \in I\!N$ موجود باشد که هرگاه $n,m > N$، $d(x_n,x_m) \ll c$؛ آن‌گاه می‌گوییم دنباله (x_n) یک دنباله کشی در X است.

◄ **تعریف (۴—۷).** فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی باشد که هر دنباله کشی در آن همگرا است. آن‌گاه گوییم (X,d) یک فضای متریک مخروطی کامل[5] است.

◄ **لم (۴—۸).** فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی و (x_n) دنباله کشی در آن باشد. اگر (x_n) به یک x همگرا باشد، آن‌گاه (x_n) کشی است.

برهان . برای هر $c \in E \gg 0$ یک $N \in I\!N$ موجود است که برای هر $n,m > N$ داریم: $d(x_n,x) \ll c/2$ و $d(x_m,x) \ll c/2$. ازاین رو $d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x) + d(x_m,x) \ll c$ و (x_n)

[5] Complete Cone Metric space

یک دنباله کشی است. □

◄ قضیه **(۴—۹).** فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی و P یک مخروط نرمال با ثابت نرمال K باشد. آن‌گاه (x_n) یک دنباله کشی است اگروتنهااگر $d(x_n,x_m)\to 0$ $(n\to\infty)$

برهان . دنباله کشی (x_n) را در نظر گرفته برای هر $\epsilon>0$، $c\in E$ را چنان برگزینید که $c\gg 0$ و $K\|c\|<\epsilon$. آن‌گاه N ای موجود است که برای هر $n,m>N$، $d(x_n,x_m)\ll c$. در نتیجه هرگاه $n,m>N$ داریم: $\|d(x_n,x_m)\|\leq K\|c\|<\epsilon$. و این یعنی $d(x_n,x_m)\to\infty$ $(n,m\to\infty)$

برعکس فرض کنید $d(x_n,x_m)\to 0$ $(m,n\to\infty)$. برای هر $c\in E$ $\gg 0$، یک $\delta>0$ موجود است که $\|x\|<\delta$ ایجاب کند که $c-x\in IntP$. هم‌چنین N ای یافت می شود که هرگاه $n,m>N$ داریم: $\|d(x_n,x_m\|<\delta$. پس $c-d(x_n,x_m)\in IntP$. این یعنی $d(x_n,x_m)\ll c$. پس (x_n) یک دنباله کشی است. □

◄ لم **(۴—۱۰).** فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی و P یک مخروط نرمال با ثابت نرمال K باشد. به‌علاوه (x_n) و (y_n) دو دنباله در X باشند که $x_n\to x$ و $y_n\to y$ $(n\to\infty)$. آن‌گاه:

$$d(x_n,y_n)\to d(x,y)\quad (n\to\infty)$$

برهان . برای $\epsilon>0$، $c\in E$ را چنان انتخاب کنید که $c\gg 0$ و $\|c\|<\frac{\epsilon}{4K+2}$. ازآن‌جاکه $x_n\to x$ و $y_n\to y$ داریم:

$$d(x_n,y_n)\leq d(x_n,x)+d(x,y)+d(y_n,y)\leq d(x,y)+2c$$

و

$$d(x,y)\leq d(x_n,x)+d(x_n,y_n)+d(y_n,y)\leq d(x_n,y_n)+2c.$$

بنابراین:

$$\circ \leq d(x,y) + ۲c - d(x_n, y_n) \leq ۴c$$

و

$$||d(x_n,y_n) - d(x,y)|| \leq ||d(x,y) + ۲c - d(x_n,y_n)|| + ||۲c|| \leq (۴K + ۲)||c|| < \epsilon$$

پس $d(x_n,y_n) \to d(x,y)$ $(n \to \infty)$. □

◄ **تعریف (۴—۱۱).** فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی باشد که هر دنباله (x_n) در آن زیر دنباله‌ای همگرا داشته باشد. آن‌گاه گوییم X یک فضای متریک مخروطی دنباله‌ای کامل[٦] است.

۲.۴ قضایای نقطه ثابت برای فضاهای متریک مخروطی

مشابه فضاهای متریک، برای فضاهای متریک مخروطی هم قضایای نقطه ثابتی مشابه با قضیه باناخ ثابت می‌شود. این قضایا نیز در [١٦] آمده است.

◄ **قضیه (۴—۱۲).** فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی کامل و P یک مخروط نرمال با ثابت نرمال K باشد. به‌علاوه فرض کنید نگاشت $T : X \to X$ یک نگاشت انقباضی باشد؛ یعنی یک $k \in [\circ, ۱)$ موجود باشد که برای هر $x,y \in X$،

$$d(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$$

دراین‌صورت T دارای یک نقطه ثابت یکتا است و برای هر $x \in X$ دنباله $(T^n x)$ بدان نقطه ثابت همگراست.

برهان . یک $x_\circ \in X$ را به‌دل‌خواه برگزیده قرار دهید: $x_۱ = Tx_\circ$، $x_۲ = Tx_۱ = T^۲ x_\circ$، ... $x_{n+۱} = Tx_n = T^{n+۱}x_\circ$ و .... داریم:

[٦] Sequentially complete Cone metric space

$$\leq k^{2}d(x_{n-1},x_{n-2}) \leq ... \leq k^{n}d(x_{1},x_{0})$$

$$d(x_{n+1},x) = d(Tx_n,Tx_{n-1}) \leq kd(x_n,x_{n-1})$$

بنابراین اگر $n > m$:

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_{n-1}) + d(x_{n-1},x_{n-2}) + ... + d(x_{m+1},x_m)$$

$$\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + ...k^{m})d(x_{1},x_{0}) \leq \frac{k^m}{1-k}d(x_{1},x_{0})$$

پس داریم: $||d(x_n,x_m)|| \leq \frac{k^m}{1-k}||d(x_{1},x_{0})||$. درنتیجه $d(x_n,x_m) \to 0$ $(n,m \to \infty)$ و چنان‌که پیش‌تر آمد، این یعنی (x_n) یک دنباله کشی است. بنابر کامل بودن X، یک $x^* \in X$ موجود است که $x_n \to x^*$ $(n \to \infty)$. کنون داریم:

$$d(Tx^*,x^*) \leq d(Tx_n,Tx^*) + d(Tx_n,x^*) \leq kd(x_n,x^*) + d(x_{n+1},x^*)$$

و

$$||d(Tx^*,x^*)|| \leq K(k||d(x_n,x^*)|| + ||d(x_{n+1},x^*)||) \to 0$$

ازاین‌رو $||d(Tx^*,x^*)|| = 0$ که نتیجه می‌دهد: $Tx^* = x^*$. یعنی x^* یک نقطه ثابت برای T است.

اکنون اگر y^* نقطه ثابت دیگری از T باشد، آن‌گاه

$$d(x^*,y^*) = d(Tx^*,Ty^*) \leq kd(x^*,y^*)$$

که درنتیجه $||d(x^*,y^*)|| = 0$ و $x^* = y^*$ و این یکتایی نقطه ثابت T را نشان می‌دهد. □

در زیر دو نتیجه مهم از قضیه فوق را آورده‌ایم.

◄ نتیجه **(۴−۱۳).** فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی کامل و نرمال با ثابت نرمال K باشد. برای $0 \ll c \in E$ و $x_0 \in X$، قرار دهید: $B(x_0,c) = \{x \in X : d(x_0,x) \leq c\}$. هم‌چنین فرض کنید نگاشت $T : X \to X$ در شرط انقباضی زیر صدق کند:

$$\forall x,y \in B(x_0,c) \quad d(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$$

که در آن $k \in [0,1)$ یک عدد ثابت است و داریم $d(Tx_{\circ}, x_{\circ}) \leq (1-k)c$. با این شرایط، T دارای یک نقطه ثابت در $B(x_{\circ}, c)$ است.

برهان . برای اثبات این حکم تنها کافی است نشان دهیم که $B(x_{\circ}, c)$ کامل است و برای هر $x \in B(x_{\circ}, c)$، $Tx \in B(x_{\circ}, c)$ باشد. فرض کنید (x_n) یک دنباله کشی در $B(x_{\circ}, c)$ باشد. آن‌گاه (x_n) یک دنباله کشی در X است . پس یک $x \in X$ موجود است که $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. هم‌چنین داریم:

$$d(x_{\circ}, x) \leq d(x_n, x_{\circ}) + d(x_n, x) \leq d(x_n, x) + c$$

که اگر $n \to \infty$ نتیجه می‌دهد که $d(x_{\circ}, x) \leq c$. بنابراین $B(x_{\circ}, c)$ کامل است.

حال برای هر $x \in B(x_{\circ}, c)$ داریم:

$$d(x_{\circ}, Tx) \leq d(Tx_{\circ}, x_{\circ}) + d(Tx_{\circ}, Tx) \leq (1-k)c + kd(x_{\circ}, x) \leq (1-k)c + kc = c$$

ازاین رو $Tx \in B(x_{\circ}, c)$. $\square$

◄ نتیجه **(۴—۱۴).** فرض کنید (X, d) یک فضای متریک مخروطی کامل و P یک مخروط نرمال با ثابت نرمال K باشد. هم‌چنین فرض کنید نگاشت $T : X \to X$، برای یک $n \in \mathbb{N}$ و $k \in [0,1)$ در شرط زیر صدق کند:

$$d(T^n x, T^n y) \leq kd(x, y) \quad ; (\forall x, y \in X)$$

آن‌گاه T دارای یک نقطه ثابت یکتا است.

برهان . بنابر قضیه۴—۱۲، T^n دارای یک نقطه ثابت x^* است. هم‌چنین $T^n(Tx^*) = T(T^n x^*) = Tx^*$ و Tx^* نیز نقطه ثابت T^n است. زین‌رو $Tx^* = x^*$ و x^* نقطه ثابت T است. هم‌چنین نقطه ثابت T

یکتااست زیراکه هر نقطه ثابت T، نقطه ثابت T^n نیز هست. □

◄ **قضیه (۴–۱۵).** فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی دنباله‌ای کامل و P یک مخروط منظم[۷] باشد. هم‌چنین فرض کنید نگاشت $T: X \to X$ در شرط انقباضی زیر صدق کند:

$$d(Tx,Ty) < d(x,y) \quad \forall x,y \in X$$

آن‌گاه T دارای یک نقطه ثابت یکتا در X است.

برهان . یک $x_0 \in X$ را در نظر بگیرید. قرار دهید: $x_1 = Tx_0$، $x_2 = Tx_1 = T^2x_0$، ...، $x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$ و ... اگر برای یک n، $x_{n+1} = x_n$، آن‌گاه x_n نقطه ثابتی از T و اثبات کامل است. پس فرض کنید که برای هر n، $x_{n+1} \neq x_n$. و قرار دهید: $d_n = d(x_{n+1}, x_n)$. داریم:

$$d_{n+1} = d(x_{n+1}, x_{n+2} = d(Tx_n, Tx_{n+1}) < d(x_n, x_{n+1}) = d_n$$

بنابراین d_n یک دنباله نزولی با یک کران پایین ۰ است و ازآن‌جا که P منظم است، یک $d^* \in E$ یافت می‌شود که $d_n \to d^*$ $(n \to \infty)$. چون X دنباله ای کامل است، زیردنباله (x_{n_i}) از (x_n) و $x^* \in X$ را می‌توان جست که $x_{n_i} \to x^*$ $(i \to \infty)$. حال داریم:

$$d(Tx_{n_i}, Tx^*) \leq d(x_{n_i}, x^*) \quad , i = 1, 2, ...$$

و درنتیجه:

$$||d(Tx_{n_i}, Tx^*)|| \leq K||d(x_{n_i}, x^*)|| \to 0 \quad (i \to \infty)$$

که در عبارت فوق K ثابت نرمال E است. پس $Tx_{n_i} \to Tx^*$ $(i \to \infty)$. به‌گونه‌ای مشابه $T^2x_{n_i} \to T^2x^*$ $(i \to \infty)$. بنابه لم ۴–۱۰ داریم $d(Tx_{n_i}, x_{n_i}) \to d(Tx^*, x^*)$ $(i \to \infty)$. روشن

---
۷ Regular point

است که

$$d(Tx_{n_i}, x_{n_i}) = d_{n_i} \to d^* = d(Tx^*, x^*) \quad (i \to \infty)$$

حال نشان می‌دهیم که $Tx^* = x^*$. اگر $Tx^* \neq x^*$، آن‌گاه $d^* \neq ۰$ و داریم:

$$d^* = d(Tx^*, x^*) > d(T^۲x^*, Tx^*) = \lim_{i\to\infty} d(T^۲x_{n_i}, Tx_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} d_{n_i+۱} = d^*$$

که این یک تناقض است. بدین ترتیب $Tx^* = x^*$؛ یعنی x^* یک نقطه ثابت T است. یکتایی این نقطه ثابت به‌آسانی ثابت می‌شود. □

در [۱۶] نتایج دیگری نیز از قضیه نقطه ثابت آمده است که ما از آوردن آن چشم‌پوشی می‌کنیم و این بخش را با مثالی به پایان می‌بریم.

◄ مثال **(۴—۱۶).** فرض کنید $E = I\!R^۲$، صفحه اقلیدسی و $P = \{(x,y) \in I\!R^۲ : x, y \leq ۰\}$ یک مخروط نرمال باشد. هم‌چنین فرض کنید

$$X = \{(x,۰) \in R^۲ : ۰ \leq x \leq ۱\} \cap \{(۰,x) \in R^۲ : ۰ \leq x \leq ۱\}.$$

نگاشت $d : X \times X \to E$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$d((x,۰),(y,۰)) = (\tfrac{۴}{۳}|x-y|, |x-y|)$$

$$d((۰,x),(۰,y)) = (|x-y|, \tfrac{۲}{۳}|x-y|)$$

$$d((x,۰),(۰,y)) = d((۰,y),(x,۰)) = \tfrac{۴}{۳}x + y, x + \tfrac{۲}{۳}y)$$

درآن‌صورت (X,d) یک فضای متریک مخروطی کامل است.

حال فرض کنید $T : X \to X$ به صورت زیر تعریف شود:

$$T((x,۰)) = (۰,x) \quad \text{و} \quad T((۰,x)) = (\tfrac{۱}{۲}x, ۰)$$

آن‌گاه T در شرط انقباضی زیر صدق می کند:

$$d(T((x_1,x_2)),T((y_1,y_2))) \leq \frac{3}{4}d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \quad (\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in X)$$

و روشن است که $(0,0) \in X$ نقطه ثابت یکتای T است. جالب این که اگر متریک اقلیدسی را روی X در نظر بگیریم می‌بینیم که X یک نگاشت انقباضی نیست.

۳.۴ دامنه گوی‌های فرمال برای فضاهای متریک مخروطی

پیش از معرفی دامنه گوی‌های فرمال برای فضاهای متریک مخروطی، بنا به نیازی که در ادامه خواهیم داشت، توپولوژی مخروطی با چند لم، دقیق‌تر معرفی می‌کنیم.

◄ لم **(۴—۱۷).** فرض کنید $x \in IntP$. داریم:

$$\forall y (y \geq x \to y \in IntP).$$

برهان . داریم $y = x + (y-x)$ و $x, y-x \in P$ لذا $y \in P$. تابع $f: E \to E$، $u \to u + (x-u)$ با در نظر گرفتن متر ایجاد شده به وسیله نرم، یک تابع پیوسته است. بنابراین اگر U یک همسایگی باز x در P باشد، $f^{-1}(U) \cap P$ یک همسایگی باز y در P خواهد بود. □

◄ تعریف **(۴—۱۸).** فرض کنید $r \gg 0$ و $x \in X$. تعریف می کنیم:

$$B(x,r) := \{y \in X; d(x,y) \ll r\}.$$

◄ لم **(۴—۱۹).** فرض کنید $y \in B(x,r)$. درای‌ن‌صورت $s \gg 0$ای یافت می‌شود که

$B(y,s) \subseteq B(x,r)$.

برهان .   قرار دهید: $s = r - d(x,y)$. بدیهی است که $s \in IntP$. اگر $d(t,y) \ll s = r - d(x,y)$ آن گاه $r - d(x,y) - d(t,y) \in IntP$. حال با توجه به این که $r - d(t,x) \geq r - d(x,y) - d(t,y)$ و با نگاهی به لم قبل، $r - d(x,y) - d(t,y) \in IntP$. یعنی $d(t,x) \ll r$. □

◄ لم **(۴—۲۰).** اگر $r_1, r_2 \gg 0$، آن‌گاه می‌توان $n \in N$ را به‌گونه‌ای یافت که $0 \ll (r_1 + r_2)/n \ll r_1, r_2$.

برهان .   یک همسایگی δ از r_1 در $IntP$ است. $(r_1 + r_2)/n$ در P است. با در نظر گرفتن یک $n \in N$ به اندازه کافی بزرگ، می‌توان به شرط زیر دست یافت.

$$|r_1 - (r_1 + r_2)/n - r_1| \leq \delta.$$

یعنی $(r_1 + r_2)/n \in IntP$ و $(r_1 + r_2)/n \ll r_1$. به همین ترتیب می‌توان n را طوری انتخاب نمود که شرط $(r_1 + r_2)/n \ll r_2$ نیز برآورده شود. □

◄ لم **(۴—۲۱).** اگر $s \leq r$، آن گاه $B(x,s) \subseteq B(x,r)$.

برهان .   داریم $r - d(x,y) \geq s - d(x,y)$. پس بنا بر لم اول اگر $s - d(x,y) \in IntP$، آن‌گاه $r - d(x,y) \in IntP$. □

◄ قضیه **(۴—۲۲).** فرض کنید (X, E, P) یک فضای متریک مخروطی باشد. آن‌گاه خانواده $\{B(x,r); x \in X, r \gg 0\}$ تشکیل یک پایه برای یک توپولوژی روی X می دهد.

برهان . اگر $IntP \neq \Phi$، به‌روشنی برای هر $x \in X$ همسایگی بازی شامل آن موجود است. فرض کنید $y \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$، آن گاه بنا بر لم ۴—۱۹ s_1 و s_2 ای موجود است که $B(y, s_1) \subseteq B(x_1, r_1)$ و $B(y, s_2) \subseteq B(x_2, r_2)$. بنا بر لم ۴—۲۰، $n \in I\!N$ ای یافت می‌شود که $s = (s_1 + s_2)/n \ll s_1, s_2$ و بنابر لم ۴—۲۱ $B(y, s) \subseteq B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$ که این امر، اثبات را تکمیل می‌کند. □

◄ لم **(۴—۲۳).** فرض کنید (X, E, P, d) یک فضای متریک مخروطی منظم باشد. آن گاه دنباله (x_n) با توپولوژی فوق یک دنباله کشی است اگروتنهااگر $d(x_n, x_m) \to 0$ وقتی $n \to \infty$.

برهان . به ۴—۹ مراجعه کنید. □

◄ تعریف **(۴—۲۴).** فرض کنید (X, E, P) یک فضای متریک مخروطی باشد. قرار دهید $BX = X \times P$ و ترتیب $\leq$ را روی BX به صورت زیر تعریف کنید:

$$(x, r) \leq (y, s) \leftrightarrow r \geq s \text{ و } d(x, y) \leq r - s$$

به‌آسانی می‌توان نشان داد که BX با ترتیب فوق یک مجمموعه مرتب جزئی[۸] است. پیش از بیان قضیه زیر، یادآور می‌شویم که شبکه $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ را نزولی می‌خوانیم هرگاه: $\gamma_1 \leq \gamma_2 \Rightarrow x_{\gamma_1} \geq x_{\gamma_2}$

◄ قضیه **(۴—۲۵).** فرض کنید (X, E, P) یک فضای متریک مخروطی و E دارای این خاصیت باشد که هر شبکه نزولی در آن دارای حد است. دراین‌صورت اگر $D \subseteq BX$ یک مجمموعه جهت‌دار باشد، می‌توان یک دنباله صعودی $\{(x_n, r_n)\}$ از اعضای D پیدا کرد که مجموعه کران های بالای این دنباله با مجموعه کران های بالای D یکی باشد.

برهان . فرض کنید $D \subseteq BX$ جهت‌دار باشد. قرار دهید $R = \{r; \exists x \in X \ (x, r) \in D\}$. R را با ترتیب عکس ترتیب E می‌توان به عنوان یک شبکه در نظر گرفت. پس طبق فرض R دارای حد است.

[۸] Partially Ordered Set

فرض کنید $r = \lim(r_i)_{i\in R}$. به‌آسانی می توان نشان داد که r از تمامی اعضای R کمتر است و می توان دنباله نزولی (s_n) از اعضای $I\!R$ را چنان یافت که $\lim s_n = r$ وقتی $(n \to \infty)$. فرض کنید (y_n, s_n) دنباله متناظر در D باشد. قرار دهید $(x_\circ, r_\circ) = (y_\circ, s_\circ)$. برای ساختن (x_{n+1}, r_{n+1}) یک کران بالا برای (x_n, r_n) و $(y_n + ۱, s_n + ۱)$ را در D برگزینید (که بنا به جهت‌دار بودن D این امر میسر است). دنباله (x_n, r_n) که بدین‌ترتیب ساخته می‌شود یک دنباله صعودی از اعضای D است. فرض کنید (z, t) یک کران بالا برای این دنباله و (u, v) عنصر دلخواهی از D باشد. برای (u, v) و $(x_\circ, r_\circ)$ کران بالای $(u_\circ, v_\circ)$ در D وجود دارد. به‌علاوه فرض کنید (u_n, v_n) کران بالایی از $(u, v), (x_n, r_n)$ و $(u_{n-۱}, v_{n-۱})$ در D باشد و بدین‌سان دنباله (u_n, v_n) از اعضای D را بسازید. داریم:

$$d(u,z) \leq d(u,u_n) + d(u_n,x_n) + d(x_n,z) \leq (v - v_n) + (r_n - v_n) + r_n - t = v - t + ۲(r_n - v_n)$$

که اگر $(n \to \infty)$ نتیجه می‌دهد که

$$d(u,z) \leq v - t.$$

بنابراین همان‌گونه که انتظار می‌رفت، (z,t) کران بالایی برای D نیز می‌باشد. □

◄ قضیه **(۴–۲۶).** فرض کنید (X, E, P) یک فضای متریک کامل [۹] باشد که در آن هر شبکه نزولی دارای حد است. در آن صورت BX یک $DCPO$ است.

برهان . فرض کنید $D \subseteq BX$ جهت‌دار باشد. می‌توانیم دنباله صعودی (x_n, r_n) از عناصر D را بیابیم که مجموعه کران های بالای آن با مجموعه کران های بالای D یکی است. (r_n) یک دنباله نزولی و همگرا به عنصری چون r است و

$$d(x_n, x_m) \leq r_n - r_m \Rightarrow d(x_n, x_m) \to \circ (n, m \to \infty)$$

[۹] complete

پس (x_n) یک دنباله کشی در X است که بنابه کامل بودن X، به عنصری چون x همگرا است. کنون نشان می‌دهیم که (x,r) سوپرمم (x_n,r_n) است. داریم

$$d(x_n,x) \leq d(x_n,x_m) + d(x_m,x) \leq (r_n - r_m) + d(x_m,x)$$

و اگر $m \to \infty$ نتیجه می‌شود که $d(x_n,x) \leq r_n - r$. پس (x,r) سوپرمم این دنباله و به تبع آن، سوپرمم D است. □

◄ لم **(۴—۲۷).** فرض کنید (X,E,P) یک فضای متریک مخروطی باشد که هر شبکه نزولی در آن دارای حد است و $\alpha \in IntP$. آن‌گاه در BX داریم:

$$(x,r) \ll (y,s) \leftrightarrow d(x,y) \ll r-s$$

برهان . اگر $r-s \gg d(x,y)$، آن‌گاه $r-s-d(x,y) \in IntP$ و لذا $\lim r-s-d(x,y)-\alpha/n \in IntP$. از این رو $n_\circ \in I\!N$ وجود دارد که $r-s-d(x,y)-\alpha/n_\circ \in IntP$، یعنی $d(x,y) \leq r-s-\alpha/n_\circ$. قرار دهید $\epsilon = \alpha/n_\circ$. کنون D را زیرمجموعه جهت‌داری از BX بگیرید که سوپرمم آن (z,t) است و فرض کنید $(y,s) \leq \sup D = (z,t)$. بنابه مطالب پیش دنباله (z_n,t_n) از عناصر D وجود دارد که

$$\sup D = (\lim z_n, \lim t_n) = (z,t)$$

شرط این که هر شبکه در E دارای حد است ایجاب می‌کند که P منظم باشد و بنابراین $n_\circ$ ای موجود است که $d(z_n,z) \ll \epsilon/۲$ و $t_n \leq t + \epsilon/۲$. پس:

$$d(x,z_n \leq d(x,y) + d(y,z) + d(z,z_n) \leq (r-s-\epsilon) + (s-t) + \epsilon/۲ \leq r_(t+\epsilon/۲) \leq r - t_n$$

و بنابراین $(x,r) \leq (z_n,t_n)$ و ثابت شد که $(x,r) \ll (y,s)$. حال برای اثبات در جهت عکس فرض کنید $(x,r) \ll (y,s)$. دنباله $(y,s+\alpha/n_\circ)$ یک دنباله صعودی با سوپرمم (y,s) است. پس $n_\circ \in N$ موجود است که $(x,r) \leq (y,s+\alpha/n_\circ)$ یعنی $d(x,y) \leq r-s-\alpha/n_\circ$. لذا $r-s-d(x,y) \geq \alpha/n_\circ$ و $\alpha/n_\circ \in IntP$. بنابه لم۴—۱۷، $r-s-d(x,y) \in IntP$ و درنتیجه $d(x,y) \ll r-s$. □

◄ قضیه **(۴—۲۸).** فرض کنید (X,E,P) یک فضای متریک مخروطی باشد، $\alpha \in IntP$، A یک زیر مجموعه چگال از X و $B \subseteq E$ به‌گونه‌ای باشد که برای هر $x,y \in P$ اگر $x \leq y$ آن‌گاه عنصری مثل $b \in B$ موجود باشد که $x \leq b \leq y$. با این شرایط $A \times B$ پایه ای برای BX خواهد بود.

برهان . این اثبات بسیار شبیه به اثبات عدالت و هکمن در مقاله[۱۱] برای فضاهای متریک است که با اندکی تغییر در این جا هم کار می کند. فرض کنید $(x,r) \in BX$. ما دنباله صعودی (x_n,r_n) از عناصر $A \times B$ را معرفی می کنیم که تمام عنصر آن $(x,r) \gg$ باشند و سوپرمم آن (x,r) باشد. برای هر $n \in N$ عنصر $x_n \in A$ را به گونه ای انتخاب کنید که $d(x_n,x) \ll ۲^{-n}.\alpha$ و $r_n \in B$ را به گونه ای انتخاب کنید که $r+۴.۲^{-n}.\alpha \leq r_n \leq r+۵.۲^{-n}.\alpha$. داریم

$$r_n - r \geq ۴.۲^{-n}.\alpha \geq ۲^{-n}.\alpha \geq d(x_n,x)$$

یعنی $(x_n,r_n) \ll (x,r)$. هم چنین داریم

$$r_n - r_{n-۱} \geq ۳.۲^{-n}.\alpha \geq d(x_{n-۱},x) + d(x_n,x) \geq d(x_{n-۱},x_n).$$

پس (x_n,r_n) دنباله مطلوب ماست. □

◄ تعریف **(۴—۲۹).** (فضای متریک مخروطی محاسبه پذیر) فرض کنید (X,E,P) یک فضای متریک مخروطی با ویژگی های زیر باشد.

۱) $A=\{x_۱,x_۲,...\}$ با توپولوژی متریک مخروطی در X چگال باشد.

۲) $T=\{r_۱,r_۲,...\}$ در P ترتیبی ـچگال باشد. یعنی $\forall x,y\in P[x\leq y\to \epsilon t\in T x\leq t\leq y]$

۳) $S=\{s_۱,s_۲,...\}$ با توپولوژی ایجاد شده به وسیله نرم در E چگال و دارای این خاصیت باشد که هرگاه $s_n\in P$، r_n ای یافت شود که $B(s_n,r_n)=\{y\in E:|y-s_n|\leq t_n\}\subseteq P$ یعنی s_n نقطه درونی P باشد.

۴) E یک فضای باناخ کارا باشد (با در نظر گرفتن S به عنوان یک زیر مجموعه چگال در E).

۵) رابطه $|d(x_n,x_m)-r_n-r_m-s_p|\leq t_p$ نسبت به n,m,p محاسبه‌پذیر باشد.

درآن‌صورت (X,E,P) را یک فضای متریک مخروطی کارا می‌نامیم.

با این تعریف، پیداست که اگر X یک فضای متریک مخروطی کامل و کارا باشد، آن‌گاه BX یک دامنه کارا است.

۴.۴ قضیه نقطه ثابت برای فضاهای متریک مخروطی

به‌سان آن‌چه برای فضاهای متریک و شبه‌متریک آوردیم، اکنون قضیه نقطه ثابت را برای فضاهای متریک مخروطی بررسی می‌کنیم. لم ساده زیر در راه اثبات این قضیه، کارساز است.

◄ **لم (۴—۳۰).** فرض کنید (X,E,P) یک فضای متریک مخروطی، $\alpha\in IntP$ و y عنصر دل‌خواهی در E باشد. آن‌گاه عنصر $x\in IntP$ یافت می‌شود که $y\leq x$.

برهان . داریم: $\lim_{n\to\infty}\alpha-y/n=\alpha\in IntP$. بنابراین $n\in I\!N$ چنان یافت می‌شود که: $\alpha-y/n\in IntP$ یا $n\alpha-y\in IntP$. □

یادآوری می‌کنیم که برای یک فضای متریک مخروطی X، نگاشت $f:X\to X$ را یک انقباض

نامیم هرگاه $c < 1$ در $\mathbb{R}$ موجود باشد که

$$\forall x, y \in X \quad [d(fx, fy) \leq cd(x, y)].$$

کنون برای قضیه زیر آماده‌ایم:

◄ قضیه **(۴−۳۱).** فرض کنید (X, E, P) یک فضای متریک مخروطی باشد که $\alpha \in IntP$ و هر شبکه نزولی در E دارای حد است. آن‌گاه، هر انقباض $f : X \to X$ یک نقطه ثابت یکتا دارد.

برهان . با شرایط قضیه، BX یک $DCPO$ است. نگاشت صعودی $g : BX \to BX$ را در نظر گیرید که (x, r) را به $(f(x), cr)$ می‌برد. بنابه لم پیش، $r \in IntP$ چنان یافت می‌شود که $r \geq d(x, fx)/1 - c$ و g، $\uparrow (x, r)$ را به درون خودش می‌نگارد. هم‌چنین $\uparrow (x, r)$ یک $DCPO$ است که (x, r) کوچکترین عنصر آن به شمار می‌آید. نگاشت $g :\uparrow (x, r) \to\uparrow (x, r)$ یکنوا است و بر اساس قضیه نقطه ثابت تارسکی دارای کوچک‌ترین نقطه ثابت $\sup(f^n(x), c^n r)$ است. اما $\sup(f^n(x), c^n r)$ به شکل $(z, 0)$ است که $\lim d(f^n x, z) = 0$. به‌علاوه $(z, 0)$ یک نقطه ماکزیمال در BX و زین‌روی تنها نقطه ثابت $g :\uparrow (x, r) \to\uparrow (x, r)$ است که مستقل از انتخاب r به دست می‌آید. اکنون تنها کافی نشان دهیم که $(z, 0)$ تنها نقطه ثابت $g : BX \to BX$ است. فرض کنید g نقطه ثابت دیگری چون (u, v) داشته باشد. $r' \in intP$ را چنان برمی‌گزینیم که $r' \geq \max\{t + d(u, z), r\}$ داریم $(u, v) \in\uparrow (x, r)$. با در نظر گرفتن $g :\uparrow (x, r') \to\uparrow (x, r')$ و با بحث های مشابه بالا، پیداست که (u, v) دقیقاً همان $(z, 0)$ است. هم‌چنین به آسانی می‌توان دید که z تنها نقطه ثابت $f : X \to X$ است. □

فصل ۵

پیوست

آشنائی با مفهوم محاسبه‌پذیری

در این فصل برآنیم تا به اجمال مفاهیمی از نظریه محاسبه‌پذیری را که پیش‌نیاز این پایان‌نامه اند، بیاوریم. ازاین روی اغلب از اثبات قضایا خودداری نموده و به حداقل مثال‌ها بسنده کرده‌ایم. لکن خواننده می‌تواند تفصیل این مطالب را در [۸] و [۱۸] بیابد.

مفاهیم محاسبه‌پذیری عموماً برای زیرمجموعه های اعداد طبیعی تعریف می‌شوند و تعمیم آن‌ها به اعداد حقیقی و دیگر ساختارهای ریاضی، موضوع علم دیگری به نام آنالیز محاسباتی است. بنابراین پیش از ورود به بحث، توجه کنید که توابع و مجموعه‌ها در این فصل همه در $I\!N$ تعریف شده‌اند.

نخست از همه با توابع بازگشتی آشنا می‌شویم. این توابع به نحو اسقرائی زیر تعریف می‌شوند:

◄ تعریف (۵—۱). *توابع بازگشتی*[۱] به نحو استقرائی زیر به‌دست می آیند:

۱) تابع ثابت صفر، تابع تالی ($x \to x+۱$) و تابع افکنش[۲] $(x_۱,...x_n) \to x_i$ بازگشتی‌اند.

۲) اگر توابع g، $h_۰$،...و h_l بازگشتی باشند، آن‌گاه

[۱] گاهی آن‌هارابازگشتی جزئی می‌نامند زیراکه لزوماً درتمام دامنه تعریف نمی شوند.
[۲] projection

الف. تابع $f(\vec{m}) = g(h_{\circ}(\vec{m}), ...h_l(\vec{m}))$ و

ب. تابع $f(\vec{m}, \circ) = g(\vec{m})$ و $f(\vec{m}, n+1) = h(\vec{m}, n, f(\vec{m}, n))$

نیز بازگشتی اند.

۳) اگر $g(\vec{n}, m)$ بازگشتی باشد، آن‌گاه تابع f با ضابطه $f(\vec{n}) = \mu m[g(\vec{n}, m) = \circ]$ که

$$\mu[g(\vec{n}, m) = \circ] = m_{\circ} \Leftrightarrow g(\vec{n}, m_{\circ}) = \circ \wedge (\forall m < m_{\circ})[g(\vec{(n)}, m) \downarrow \neq \circ]$$

نیزبازگشتی است.

علاوه‌براین، یک مجموعه S را بازگشتی گوییم هرگاه تابع مشخصه آن(χ_S) بازگشتی و در تمام دامنه تعریف شده باشد. بدین ترتیب رابطه R رابازگشتی گوییم هرگاه به عنوان یک مجموعه، بازگشتی باشد. بنابه تز چرچ[۳] که در ادامه خواهد آمد توابع بازگشتی دقیقاً همان توابعی هستند که برای محاسبه آن‌ها یک الگوریتم مشخص موجود است و با این نگاه، آن‌ها را به‌طورکارامحاسبه پذیر نیز می‌نامیم. به بیان دقیق‌تر وقتی می‌گوییم تابع f *به طور کارا محاسبه‌پذیر*[۴] است یعنی یک الگوریتم مشخص در یک زبان موجود است که به ازای هر مقدار $x \in N$، اگر x در دامنه f باشد، $f(x)$ را حتماً حساب می کند وگرنه به‌ازای ورودی x خروجی معینی ندارد. لکن خود مفهوم الگوریتم نیز می بایست به نحو دقیق‌تری بیان شود.

یک ماشین تورینگ[۵] دستگاهی مجازی متشکل از یک نوار و یک هد است که هد می تواند با حرکت به چپ و راست، مقادیر .و۱ را به روی نوار بنگارد. هر الگوریتم رایانه ای معادل یک ماشین تورینگ است. یعنی موجود بودن الگوریتم برای محاسبه یک تابع معادل موجود بودن یک ماشین تورینگ برای محاسبه آن است. در زیر تز چرچ را به نحو دقیق تری بیان می کنیم:

◄ **تز چرچ.** تابع f بازگشتی است اگروتنهااگر به طور کارا محاسبه پذیر باشد.

---

۳ Alonzo Church-1930

۴ effectively computable

۵ Alan Turing-1936

با توجه به تز چرچ، مجموعه S بازگشتی است اگرچنان‌چه یک الگوریتم موجود باشد که برای هر $x \in I\!N$ به ما بگوید که این x در مجموعه مورد نظر واقع می شود یاخیر. ازاین‌رو مجموعه بازگشتی را مجموعه محاسبه‌پذیر[۶] یا مجموعه الگوریتمیک هم می نامیم. اما همیشه برای یک مجموعه نمی توان الگوریتمی پیدا کرد که تمام اعضای آن را بدهد. یعنی مجموعه های غیر بازگشتی هم وجود دارند. برای یک مجموعه گاهی الگورتیمی پیدا می شود که اگر یک x مشخص در آن مجموعه باشد، پاسخ مثبت می‌دهد لکن برای x های خارج این مجموعه خروجی معینی ندارد. به‌گونه دقیق‌تر:

◄ **تعریف (۵−۲).** مجموعه $A \subseteq I\!N$ را $c.e.$[۷] گوییم هر گاه یک فرایند کارا [۸] برای شمارش اعضای آن موجود باشد. به بیان رسمی تر A را $c.e$ گوییم هرگاه یا $A = \Phi$ یا یک تابع محاسبه‌پذیر[۹] f موجود باشد که $A = \{f(\circ), f(۱), ...\} = range(f)$.

می‌توان در تعریف فوق به جای تابع محاسبه پذیر، تابع بازگشتی گذاشت و به تعریف مجموعه‌های $r.e.$[۱۰] رسید. به‌هرروی در این‌جا با توجه به تز چرچ $r.e.$ و $c.e.$ را با هم یکی می‌گیریم.

به‌راحتی می‌توان دید که اگر $A \subseteq \natural$ محاسبه‌پذیر باشد، آن‌گاه A، $c.e.$ نیز هست. زیراکه الگوریتمی که درباره وجود و عدم وجود اعضاً می تواند تصمیم بگیرد به وضوح برای وجود می تواند تصمیم بگیرد. در واقع یک مجموعه $A \subseteq \natural$ محاسبه‌پذیر است اگروتنها اگر A و A^c به‌طور هم‌زمان $c.e.$ باشند. هم‌چنین می‌توان نشان داد که اگر A و B هر دو $r.e.$ باشند، $A \cup B$ نیز چنین است.

گفتیم که هر ماشین تورینگ معادل یک الگوریتم است. روشن است که تعداد کل الگوریتم ها و لذا تعداد کل ماشین های تورینگ شمارش پذیر است. بنابراین می توان یک شمارش مناسب برای ماشین های تورینگ پیدا کرد. شناسه‌گذاری گودل[۱۱] یک راه برای این کار است. ماشین تورینگ e ام را با ϕ_e و

---

۶ Computable

۷ Computably enumerable یا قابل شمارش به نحو محاسبه پذیر

۸ effective process

۹ Computable

۱۰ Recursively enumerable

۱۱ Godel Numberings

دامنه آن(یعنی نقاطی از N که ماشین e ام روی آن هالت می کند) را با W_e نشان می‌دهیم و منظور از $\phi_e(x)\downarrow$ این است که ماشین e ام به ازای ورودی x هالت می کند. هم‌چنین برای هر $e, s \in \natural$، ماشین تورینگ e ام در مرحله s ام محاسباتی‌اش را با $\phi_{e,s}$ نشان داده و تعریف می کنیم: $W_{e,s} = dom(\phi_{e,s})$.

هرچند قصد نداریم بیش از حد با جزئیات محاسبه‌پذیری درگیر شویم، اما چون از قضیه « فرم نرمال برای مجموعه های $c.e.$ درجایی استفاده کرده ایم به ناچار این قضیه و تعاریف و قضایای پیش نیاز آن را در زیر آورده ایم. وقتی می‌گوییم «مساله هالتینگ برای ماشین تورینگ T دارای جواب است» یعنی این که ما با یک راه کارا می توانیم از پیش تشخیص دهیم که آیا ماشین T به ازای ورودی x هالت می کند یا نه.

◄ تعریف **(۵—۳).** (سطح اول از رده‌بندی محاسباتی) [۱۲] با فرض $A \subseteq \natural$:

۱) اگر برای هر $x \in \natural$ داشته باشیم $x \in A \Leftrightarrow (\exists y)R(x,y)$ ، که R یک رابطه محاسباتی است، آن گاه می‌گوییم A یک Σ°_1 ـمجموعه است، و می‌نویسیم $A \in \Sigma^\circ_1$.

۲) اگربرای یک R محاسبه‌پذیر داشته باشیم $x \in A \Leftrightarrow (\forall y)R(x,y)$، می‌گوییم A یک Π°_1 ـمجموعه است و می‌نویسیم $A \in Pi^\circ_1$.

۳) اگر $A \in \Sigma^\circ_1 \cap \Pi^\circ_1$، آن‌گاه A یک Δ°_1 ـمجموعه می‌نامیم و می‌نویسیم $A \in \Delta^\circ_1$.

تعریف فوق در واقع بخش اول از تعریف رده‌بندی محاسباتی است. رده‌بندی محاسباتی در تعریف اصلی در واقع رده‌بندی رابطه‌ها در یک زبان مرتبه اول بر اساس شکل مسورشان است. بدین‌ترتیب گوییم رابطه R، Σ°_1 است هرگاه یک رابطه محاسبه‌پذیر R' موجود باشد که

$$R(x) \Leftrightarrow (\exists y)R'(x,y)$$

---

۱۲ level 1 one of Arithmetical Hierarchy

پیداست که ادوات منطقی $\neg$، $\wedge$ و $\vee$ ما را از روابط **محاسبه پذیر**، به روابط **محاسبه پذیر** پیچیده تری می‌رسانند. یک سوال طبیعی این است که اگر از سورها پیش از روابط محاسبه‌پذیر استفاده کنیم، به چه نوع روابطی می رسیم. پاسخ این سوال را می‌توان در قضیه زیر جست‌وجو کرد.

◄ قضیه **(۵–۴).** (فرم نرمال برای مجموعه های $c.e.$)[۱۳] عبارت‌های زیر با هم معادلند:

۱) A یک مجموعه $c.e.$ است،

۲) $A \in \Sigma_1^0$،

۳) $A = W_e$ برای یک $e \in \natural$.

اثبات این قضیه را می‌توان در [۸] جست‌وجو کرد.

[۱۳] The normal form theorem for C.E. sets

مراجع

[1] Abrasmki, S; Achim, J. “Handbook of Domain Theory”. (2006)

[2] Ali Akbari, M.; Honari, B.; Pourmahdian, M.; M M Rezaei. “The space of formal balls and models of quasi-metric spaces”. *Math. Struct. in Comp. science*.19 (2009): PP 337-355.

[3] Blanck, J. “Domain representability of metric spaces”. *Annals of Pure and Applied Logic*. 83 (1997):PP 225-247

[4] Brattka, V. “Recursive quasi metric spaces”. *Theoritical computer science*, 305 (2003): PP 17-42.

[5] Brattka, V. “Computability over topological structures”. *Computability and models*, p 93-136. Kluwer Academic Publisher, New York, 2003

[6] Brattka, V; Dillhage, Ruth. “On computable compact operators on Banach spaces”, *Electronic notes in Theoretical computer science*, 167 (2007): PP 365-386

[7] Brattka, V. “Generated quasi-metric hyper and function spaces”. Topology and its applications. 127 (2003): PP 355-373

[8] Cooper, S. B. (S.Barry). **Computability theory**. Chapman & Hall/CRC, 2004.

[9] Davey, B. A.; Priestley, H. A. **Introduction to Lattices and Order**, Cambridge university Press, third printing, 2006

[10] Edalat, A; Sünderhauf, Philip. "A domain-theoritic approach to computability on the real line". *Theoretical computer science*, 210, (1999): PP 73-98

[11] Edalat, A; Heckman, Reinhold. "A computational model for metric spaces". *Theoretical computer science*. 193 (1998): PP 53-73

[12] Edalat, A; Sünderhauf, Philip. "Compuatable Banach spaces via domain theory". *Theoretical computer scince*. 219 (1999): PP 169-184

[13] Edalat, A. **Domain Theory and Continuous Data Types**. Independent study option: 2003-2004.

[14] Künzi, H. P.; Schellekens, M. P. "On the yoneda compeletion of a quasi-metric space", *Theoritical computer science*, 278 (2002) PP: 159-194.

[15] Lawson, J,D. "Spaces of Maxiaml points". *math. struct. comput. sci.*7 (1997): PP 543-555

[16] Long-Guang, H; Xian Z. "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings". *J. Math. Anal. Appl.*, 332 (2007) PP: 1468-1476

[17] Mislove, Michael W. "Topology, domain theory and theoritical computer science". *Topology and its Applicatoin*. 89 (1998): PP 3-59.

[18] Odifreddi, P. **Classical recursion theorey**. Studies in logic and the Foundations of Mathematics, Elsevier Science Publishers B.V, 1989.

[19] Pour-El, Marian B.; Richard, J.Jan. **Computabillity in Analysis and Physics**. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988.

[20] Sünderhauf P. "Quasi- uniform completeness in terms of Cauchy nets". *Acta Mathematica Hungaria*, 69, PP: 47-55

[21] Weihrauch, K. **Computable analysis. an introduction**. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2000.

[22] Willard, S. **General Topology**. Addison-Wesley Publishing company, 1970.

[23] Wihrauch, K; Schreiber, U. "Embedding metric spaces into cpo's". *theoret. Comput. Sci* 16 (1981):PP 5-24

[24] Zhang, H. "Dualities of domains". Ph.D. Thesis, Department of Mathematics, Tulane University, 1993

Abstract

The aim of this study is to establish new connections between the theory of Cone metric spaces and the theory of domains which are significant structures respectively in mathematical Analysis and theoritical computer science. For a cone metric space (X, E, P) we define a partially ordered set BX, which becomes a continuous domain whenever X is complete, and its properties varies according to that of the cone metric space. Furtheremore, the fixed point theorems for contractions on cone metric spaces is proved by using Tarski's fixed point theorem for monotone functions on BX. In addition to that, the first chapters are devoted to introducing the domain of formal balls for metric and quasi-metric spaces and investigating effectiveness of the latter domain.

Keywords: Domain Theory, Domain of formal balls, Quasi-metric space, Cone metric space, Computability.

—-

Amirkabir University of Technology

(Tehran Polytechnic)

Department of Mathematics Computer Sciences

M.Sc. Final Dissertation

Pure Mathematics (Logic)

Subject:

Cone and Quasi-metric spaces via Domain Theory

Student:

Mohsen Khani

Supervisors:

Dr. M. Pourmahdian

Dr. F. Rahmati

Advisor:

Dr. Farzad Didevar

Summer 2009