Mathematische Logik SS 1997

Klausur

10. Juli 1997

Prädikatenlogik

1. Zeigen Sie, daß die Formel $\forall y \exists x\, Rxy \to \exists x \forall y\, Rxy$ weder allgemeingültig noch widersprüchlich ist. Geben Sie dazu zwei Modelle an.
2. Zeigen Sie mit der Resolutionsmethode, daß folgende Klauselmenge widerspüchlich ist:

$$\big\{\neg A \vee \neg B \vee C \vee D\,,\ \neg C \vee \neg E \vee \neg F\,,\ \neg A \vee \neg D\,,\ B \vee C\,,\ A \vee C\,,\ \neg C \vee E\,,\ \neg C \vee F\big\}$$

3. Unifizieren Sie die Terme: $g\big(x_1, g(x_3, x_2, x_1), x_1\big)$ und $g\big(f(f(x_2, x_3), c), x_4, f(f(x_3, x_2), c)\big)$. Geben Sie dazu die universellen unifizierenden Terme u_1, u_2, u_3, u_4 an.
4. Wie lauten die beiden Regeln des Sequenzenkalküls für den Existenzquantor? Wahlweise dürfen auch die beiden Regeln für die Konjunktion angegeben werden.
5. Bringen Sie die aussagenlogische Formel $A \to \Big(\big((B \wedge \neg A) \vee (\neg C \wedge A)\big) \leftrightarrow \big(A \vee (A \to \neg B)\big)\Big)$ in disjunktive Normalform. (Hinweis: Wahrheitswertbetrachtungen führen wesentlich schneller zum Ziel als Äquivalenzumformungen).
6. Wie lautet der Kompaktheitssatz?

Mengenlehre

7. Was ist (mengentheoretisch) eine natürliche Zahl?
   Erinnerung: wir bezeichnen die ersten dieser Zahlen mit $\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3} \ldots$.
8. Geben Sie durch Aufzählung ihrer Elemente folgende Mengen an:
   a) $\underline{2} \cap \underline{4}$
   b) $\bigcup \{\emptyset\,,\ \{\{\underline{1}, \underline{2}\}, \{\{\underline{1}\}\}, \{\emptyset, \{\underline{3}\}\}\}\,,\ \underline{2}\,,\ \{\{\emptyset\}\}\}$.
9. Was besagen (als Formeln oder inhaltlich, dann aber präzise ausgedrückt) folgende Axiome?
   a) das Fundierungsaxiom
   b) das Auswahlaxiom
10. Warum bilden die Ordinalzahlen keine Menge?

Rekursiontheorie

11. Zeigen Sie, daß die Funktion $n \mapsto n!$ primitiv rekursiv ist. (Erinnerung: $0! = 1$).
12. Zeichnen Sie das Flußdiagramm einer Registermaschine mit Alphabet $|$, welche für gerade Zahlen die Funktion $n \mapsto \frac{n}{2}$ berechnet. (Was die Maschine für ungerade Zahlen tut, ist nicht wichtig.)
13. Zeigen Sie: die Menge der natürlichen Zahlen n, für welche die Gleichung $x^3 = y(y+1)(y+n)$ eine Lösung (x, y) in den natürlichen Zahlen hat, ist rekursiv aufzählbar.

Auf Aufgaben 2,3,5 gibt es zwei Punkte, auf alle anderen je einen Punkt. In jedem der drei Bereiche soll die Hälfte der Punktzahl erreicht werden. Zeit: 2 Stunden; Hilfsmittel: keine.