Klausur zur Vorlesung: Mathematische Logik

SS 2011

Geben Sie am Ende Der Klausur Ihre Lösungen einschließlich dieses Deckblatts ab. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Viel Erfolg!

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Geburtsort: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
Punkte maximal	4	6	4	4	4	4	2	4	4	4	4	10	54
Punkte erreicht													

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
$R = (R, 0, 1, +, -, \cdot)$ sei ein kommutativer Ring. Drücken Sie die folgenden Eigenschaften von R durch jeweils eine L_R–Aussage aus.

a) Jedes nicht-konstante Polynom aus $R[X]$ vom Grad ≤ 3 hat eine Nullstelle.

b) Jede Summe von von zwei Quadraten ist wieder ein Quadrat.

c) R hat genau 3 Elemente

d) R ist nullteilerfrei.

Aufgabe 2. *(6 Punkte)*
Sei $L = \{\leq\}$ mit zweistelligem Relationszeichen $\leq$. Betrachte die Axiome für eine (reflexive) partielle Ordnung:

$$\begin{array}{rl} \forall x & x \leq x \\ \forall x, y & x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x \doteq y \\ \forall x, y, z & x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z \end{array}$$

Zeigen sie, daß die Axiome unabhängig sind: keins folgt aus den zwei anderen.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Betrachte die Struktur $V = (\{0, 1, 2\}, \leq)$. Geben Sie ein Aussage an, die V bis auf Isomorphie charakterisiert.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig? (Begründen Sie die Antwort).

1. $\forall x \exists y R(x, y) \rightarrow \exists y \forall x R(x, y)$
2. $\Big(P(c) \wedge \forall x\big(P(x) \rightarrow P(f(x))\big)\Big) \rightarrow P(f(f(c)))$

Aufgabe 5. *(4 Punkte)*
Sei $\mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen. Zeige, daß es einen zu $\mathbb{Q}$ elementar äquivalenten Körper K gibt, der ein transzendentes Element t enthält. Das heißt $f(t) \neq 0$ für alle $f \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$.

Aufgabe 6. *(4 Punkte)*
Sei $L = L_1 \cap L_2$. Für $i = 1, 2$ sei T_i eine L_i-Theorie und $T_i \restriction L$ die Menge alle L-Aussagen, die aus T_i folgen. Zeigen Sie mit Hilfe des Interpolationssatzes: $T_1 \cup T_2$ ist genau dann konsistent, wenn $(T_1 \restriction L) \cup (T_2 \restriction L)$ konsistent ist.

Aufgabe 7. *(2 Punkte)*
Geben Sie eine Skolemnormalform für die folgende Aussage an:

$$\exists x \forall y\ (R(x,y) \to \exists z S(y,z))$$

Aufgabe 8. *(4 Punkte)*
Zeigen sie $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}|$.

Aufgabe 9. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, daß das Auswahlaxiom aus dem Wohlordnungssatz folgt.

Aufgabe 10. *(4 Punkte)*
Der Satz von Löb sagt: *Wenn* ZFC $\vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \phi \urcorner) \to \phi$, *dann* ZFC $\vdash \phi$. Zeigen Sie, daß daraus (für geeignetes ϕ) der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz folgt.

Aufgabe 11. *(4 Punkte)*
Zeichnen Sie das Flußdiagramm einer Registermaschine, die in der |-Darstellung die Summe zweier Zahlen berechnet.

Aufgabe 12. *(10 Punkte)*

a) Was sind die zwei Regeln des Hilbertkalküls?

b) Formulieren sie den Satz von Herbrand im Speziallfall nur einer Variablen: *Sei $\phi(x)$ eine quantorenfreie Formel in einer Sprache L, die mindestens eine Konstante enhält. Dann ist $\exists x \phi(x)$ genau dann allgemeingültig, wenn...*

c) Was ist das Vereinigungsmengenaxiom von ZFC?

d) Was ist eine rekursive Funktion?

e) Was sind die Axiome des Systems Q? (*Hinweis:* Das sind sechs Axiome mit den rekursiven Definitionen von $+, \cdot, <$).