Die Aufgaben 1-11 sind Aufgaben aus den Übungsblättern ähnlich. Die Aufgaben 12-16 geben aus jedem Kapitel eine Definition/einen Satz.

1.(Blatt 1) $R = (R, 0, 1, +, -, \cdot)$ sei ein kommutativer Ring. Drücken Sie die folgenden Eigenschaften von R durch jeweils eine L_R–Aussage aus.

a) Jedes nicht-konstante Polynom vom Grad ≤ 3 hat eine Nullstelle.

b) Jede Summe von von zwei Quadraten ist wieder ein Quadrat.

c) R hat genau 3 Elemente

d) R ist nullteilerfrei.

2.(Blatt 2) Sei $L = \{\leq\}$ mit zweistelligem Relationszeichen $\leq$. Betrachte die Axiome für eine (reflexive) partielle Ordnung:

$$\begin{array}{rl} \forall x & x \leq x \\ \forall x, y & x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x \doteq y \\ \forall x, y, z & x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z \end{array}$$

Zeigen sie, daß die Axiome unabhängig sind: keins folgt aus den zwei anderen.

3.(Blatt 3) Betrachte die Struktur $V = (\{0, 1, 2\}, \leq)$. Geben Sie ein Aussage an, die V bis auf Isomorphie charakterisiert.

4.(Blatt 4) Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig? (Begründen Sie die Antwort).

1. $\exists y \forall x R(x, y) \rightarrow \forall x \exists y R(x, y)$
2. $\forall x \exists y R(x, y) \rightarrow \exists y \forall x R(x, y)$
3. $\Big(P(c) \wedge \forall x\big(P(x) \rightarrow P(f(x))\big)\Big) \rightarrow P(f(f(c)))$

5.(Blatt 5) Sei $\mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen. Zeige, daß es einen zu $\mathbb{Q}$ elementar äquivalenten Körper K gibt, der ein transzendentes Element t enthält. Das heißt $f(t) \neq 0$ für alle $f \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$.

6.(Blatt 6) Sei $L = L_1 \cap L_2$. Für $i = 1, 2$ sei T_i eine L_i-Theorie und $T_i \restriction L$ die Menge alle L-Aussagen, die aus T_i folgen. Zeigen Sie mit Hilfe des Interpolationssatzes: $T_1 \cup T_2$ ist genau dann konsistent, wenn $(T_1 \restriction L) \cup (T_2 \restriction L)$ konsistent ist.

7.(Blatt 7) Geben Sie eine Skolemnormalform für die folgenden Aussagen an:

a) $\exists x \forall y\ (R(x, y) \rightarrow \exists z S(y, z))$

b) $\forall x \exists y \forall x\ R(x, y, x)$

8.(Blatt 8) Zeigen sie $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}|$.

9.(Blatt 9) Zeigen Sie, daß das Auswahlaxiom aus dem Wohlordnungssatz folgt.

10.(Blatt 10) Der Satz von Löb (Blatt 11, Aufgabe 4) sagt: *Wenn* ZFC $\vdash$ Bew$(\ulcorner\phi\urcorner) \rightarrow \phi$, *dann* ZFC $\vdash \phi$. Zeigen Sie, daß daraus (für geeignetes ϕ) der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz folgt.

11.(Blatt 11) Zeichnen Sie das Flußdiagramm einer Registermaschine, die in der $|$-Darstellung die Summe zweier Zahlen berechnet.

12.(Blatt x) Was sind die Axiome und Regeln des Hilbertkalküls?

13.(Blatt x) Formulieren Sie den Satz von Herbrand.

14.(Blatt x) Geben Sie (informell) die Liste der Axiome von ZFC.

15.(Blatt x) Was ist eine rekursive Funktion?

16.(Blatt x) Was sind die Axiome der Peanoarithmetik?