Klausur zur Vorlesung: Mathematische Logik

SS 2011

Geben Sie am Ende Der Klausur Ihre Lösungen einschließlich dieses Deckblatts ab. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Viel Erfolg!

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Geburtsort: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
Punkte maximal	4	6	4	4	4	4	2	4	4	4	4	10	54
Punkte erreicht													

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
$R = (R, 0, 1, +, -, \cdot)$ sei ein kommutativer Ring. Drücken Sie die folgenden Eigenschaften von R durch jeweils eine L_R–Aussage aus.

a) Jedes nicht-konstante Polynom aus $R[X]$ vom Grad ≤ 3 hat eine Nullstelle.

b) Jede Summe von von zwei Quadraten ist wieder ein Quadrat.

c) R hat genau 3 Elemente

d) R ist nullteilerfrei.

Lösung:

a) Jedes nicht-konstante Polynom aus $R[X]$ vom Grad ≤ 3 hat eine Nullstelle.

$$\forall x_0 \cdots \forall x_3 (x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0 \vee x_3 \neq 0 \to \exists y X_0 + x_1 y + x_2 y^2 + x_3 y^3 = 0)$$

b) Jede Summe von von zwei Quadraten ist wieder ein Quadrat.

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists y y^2 = x_1^2 + x_2^2$$

c) R hat genau 3 Elemente

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (\bigvee_{1 \leq i < j \leq 3} x_i \neq x_j \wedge \forall y \bigwedge_{1 \leq i \leq 3} y = x_i)$$

d) R ist nullteilerfrei.

$$\forall x_1 \forall x_2 ((x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0) \to x_1 \cdot x_2 \neq 0)$$

Aufgabe 2. *(6 Punkte)*
Sei $L = \{\leq\}$ mit zweistelligem Relationszeichen $\leq$. Betrachte die Axiome für eine (reflexive) partielle Ordnung:

$$\begin{array}{rl} \forall x & x \leq x \\ \forall x, y & x \leq y \wedge y \leq x \to x \doteq y \\ \forall x, y, z & x \leq y \wedge y \leq z \to x \leq z \end{array}$$

Zeigen sie, daß die Axiome unabhängig sind: keins folgt aus den zwei anderen.
Lösung:
Wir nennen die Axiome (i), (ii), (iii).
Man betrachte (z.B.) die Struktur $\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$ mit:

$$A = \{0, 1, 2\}, \leq^{\mathcal{A}} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 1), (1, 2)\}.$$

Dann sieht man leicht, dass $\mathcal{A}$ die Axiome (i) und (ii) erfüllt, aber nicht (iii).

Man betrachte (z.B.) die Struktur $\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$ mit:

$$A = \{0,1\}, \leq^{\mathcal{A}} = \{(0,0),(1,1),(0,1),(1,0)\}.$$

Dann sieht man leicht, dass $\mathcal{A}$ die Axiome (i) und (iii) erfüllt, aber nicht (ii).

Man betrachte (z.B.) die Struktur $\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$ mit:

$$A = \{0\}, \leq^{\mathcal{A}} = \emptyset.$$

Dann sieht man leicht, dass $\mathcal{A}$ die Axiome (ii) und (iii) erfüllt, aber nicht (i).

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Betrachte die Struktur $V = (\{0,1,2\}, \leq)$. Geben Sie ein Aussage an, die V bis auf Isomorphie charakterisiert.

Lösung:

Sei ϕ die Aussage von Aufgabe 1.c. und sei ψ die Konjunktion der Aussagen (i),(ii),(iii) von Aufgabe 2.

Man betrachte die Aussage:

$$\phi \wedge psi \wedge \forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x).$$

Es ist klar, dass die Modellen der Aussage sind genau die Lineare Ordnungen mit genau drei Elementen und dass diese sind genau die $\{\leq\}$-Strukturen, die zu V äquivalent sind.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig? (Begründen Sie die Antwort).

1. $\forall x \exists y R(x,y) \to \exists y \forall x R(x,y)$
2. $\Big(P(c) \wedge \forall x \big(P(x) \to P(f(x))\big)\Big) \to P(f(f(c)))$

Lösung:

1. $\forall x \exists y R(x,y) \to \exists y \forall x R(x,y)$

   Nicht allgemeingültig. Sei $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}})$ die Struktur mit $A = \mathbb{N}$ und $R^{\mathcal{A}} = \leq$, die übliche Ordnung auf $\mathbb{N}$. Dann ist es klar dass

   $$\mathcal{A} \models \forall x \exists y R(x,y)$$

   und

   $$\mathcal{A} \not\models \exists y \forall x R(x,y).$$

   Also,

   $$\mathcal{A} \not\models \forall x \exists y R(x,y) \to \exists y \forall x R(x,y)$$

2. $\Big(P(c) \wedge \forall x\big(P(x) \to P(f(x))\big)\Big) \to P(f(f(c)))$

Allgemeingültig. Sei $\mathcal{A} = (A, P^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ eine beliebige $\{P, f, c\}$-Struktur. Man nehme an, dass

$$\mathcal{A} \models \Big(P(c) \wedge \forall x\big(P(x) \to P(f(x))\big)\Big),$$

und zeige, dass dann $\mathcal{A} \models P(f(f(c)))$.

Zunächst hat man, dass $\mathcal{A} \models P(c)$. Und aus $\mathcal{A} \models \forall x\big(P(x) \to P(f(x))\big)$, folgt durch Ersetzung der Variable x durch die Terme $f(c)$ und $f(f(c))$, dass $\mathcal{A} \models \big(P(c) \to P(f(c))\big)$ und $\mathcal{A} \models \big(P(f(c)) \to P(f(f(c)))\big)$. Man sieht dann leicht, dass daraus folgt $\mathcal{A} \models P(f(f(c)))$.

Aufgabe 5. *(4 Punkte)*
Sei $\mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen. Zeige, daß es einen zu $\mathbb{Q}$ elementar äquivalenten Körper K gibt, der ein transzendentes Element t enthält. Das heißt $f(t) \neq 0$ für alle $f \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$.

Lösung: Sei c eine Konstante, die nicht in L_{Ring} ist. Man betrachte die Menge Σ aller $L_{Ring} \cup \{c\}$-Aussage

$$f(c) \neq 0$$

mit $f(X) \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$.

Man merke, dass jede endliche Teilmenge von $\mathrm{Th}((\mathbb{Q}, +, \cdot, -, 0, 1)) \cup \Sigma$ ein Modell hat. Das ist einfach weil jede nicht-null Polynom in $\mathbb{Z}[X]$ hat nur endlich viele Nullstellen in $\mathbb{Q}$, also kann man für jede endliche Teilmenge eine passende Interpretation $c^{\mathbb{Q}}$ für c in $\mathbb{Q}$ finden, so dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot, -, 0, 1, c^{\mathbb{Q}})$ ein Modell davon wird.

Nach dem Kompaktheitssatz folgt dann, dass $\mathrm{Th}((\mathbb{Q}, +, \cdot, -, 0, 1)) \cup \Sigma$ ein Modell $(Q, +, \cdot, -, 0, 1, c^{Q})$ hat. Es ist dann klar, dass der Körper $(Q, +, \cdot, -, 0, 1)$ elementar äquivalent zu $(\mathbb{Q}, +, \cdot, -, 0, 1)$ ist und $c^{Q} \in Q$ transzendent ist.

Alternative Lösung: Wegen des Kompaktheitssatzes (oder Löwenheim-Skolem) gibt es ein Körper $(Q, +, \cdot, -, 0, 1)$, der elementar äquivalent zu $(\mathbb{Q}, +, \cdot, -, 0, 1)$ ist und unabzählbar ist. Weil jede nicht-null Polynom in $\mathbb{Z}[X]$ hat nur endlich viele Nullstellen in Q und es nur abzählbar viele Polynomen in $\mathbb{Z}[X]$ gibt, ist die Menge aller algebraische (d.h. nicht transzendente) Elemente in Q abzählbar. Also hat Q transzendente Elementen.

Aufgabe 6. *(4 Punkte)*
Sei $L = L_1 \cap L_2$. Für $i = 1, 2$ sei T_i eine L_i-Theorie und $T_i \upharpoonright L$ die Menge alle L-Aussagen, die aus T_i folgen. Zeigen Sie mit Hilfe des Interpolationssatzes: $T_1 \cup T_2$ ist genau dann konsistent, wenn $(T_1 \upharpoonright L) \cup (T_2 \upharpoonright L)$ konsistent ist.

Lösung:

($\Rightarrow$) Klar.

($\Leftarrow$) Man nehme an, dass $T_1 \cup T_2$ inkonsistent ist. Dann, nach dem Kompaktheitssatz, gibt es $\phi_1, dots, \phi_n \in T_1$ und $\psi_1, \ldots, \psi_m \in T_2$, so dass die Menge

$$\{\phi_1, dots, \phi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m\}$$

inkonsistent ist. Seien $\phi = \bigwedge \phi_i$ und $\psi = \bigwedge \psi_i$.

Die inkonsistenz impliziert dann dass die Aussage $\phi \to \neg\psi$ allgemeingültig ist. Wegen des Interpolationssatzes, existier eine L-Aussage χ, so dass $\models \phi \to \chi$ und $\models \chi \to \neg\psi$ (d.h. $\models \psi \to \neg\chi$). Dann sieht man leicht dass χ in $(T_1 \restriction L)$ ist und $\neg\chi$ in $(T_2 \restriction L)$ ist. Also ist $(T_1 \restriction L) \cup (T_2 \restriction L)$ inkonsistent.

Aufgabe 7. *(2 Punkte)*
Geben Sie eine Skolemnormalform für die folgende Aussage an:

$$\exists x \forall y\ (R(x, y) \to \exists z S(y, z))$$

Lösung:
Zunächst bringt man die Formel in Prenexnormalform:

$$\exists x \forall y \exists z (\neg R(x, y) \vee S(y, z))$$

Dann hat man eine Skolemnormalform:

$$\forall y (\neg R(c, y) \vee S(y, f(y)))$$

wobei c eine neue Konstante und f ein neues Funktionsymbol sind.

Aufgabe 8. *(4 Punkte)*
Zeigen sie $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}|$.

Lösung:
Man merke dass $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}^2|$, weil es klar ist, dass $x+yi \mapsto (x, y)$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ definiert. Wir haben auch in den Übungsaufgaben gezeigt dass es eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ gibt, also auch zwischen $\mathbb{R}^2$ und $(\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2$.

Also genügt es zu zeigen, dass $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Das ist bestätigen von der folgende Bijektion von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nach $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$A \mapsto (\frac{1}{2}[A \cap G], \frac{1}{2}([A \cap U] - 1)),$$

wobei G die Menge aller gerade Zahlen und U die Menge aller ungerade Zahlen sind.

Aufgabe 9. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, daß das Auswahlaxiom aus dem Wohlordnungssatz folgt.

Lösung: Sei x eine Menge nicht leerer Mengen. Aus dem Wohlordnungssatz folgt, dass die Menge $\cup x$ eine Wohlordnung $\leq$ besitzt. Man definiere eine Auswahlfunktion $f : x \to V$ durch: für alle $z \in x$, $f(z) :=$ kleinstes Element von z in der

Ordnung $\leq$. Eben, man merke: $z \in x$ impliziert $z \subset \cup x$). Und, weil $\leq$ ist eine Menge, kann man f durch eine Formel (mit $\leq$ als Parameter) definieren; daraus folgt das f eine Menge ist.

Aufgabe 10. *(4 Punkte)*
Der Satz von Löb sagt: *Wenn* ZFC $\vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner\phi\urcorner) \rightarrow \phi$, *dann* ZFC $\vdash \phi$. Zeigen Sie, daß daraus (für geeignetes ϕ) der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz folgt.

Lösung:

Man betrachte eine Formel $\phi = \exists x \neg x = x$, die immer Falsch ist. (...)

Aufgabe 11. *(4 Punkte)*
Zeichnen Sie das Flußdiagramm einer Registermaschine, die in der |-Darstellung die Summe zweier Zahlen berechnet.

Aufgabe 12. *(10 Punkte)*

a) Was sind die zwei Regeln des Hilbertkalküls?

b) Formulieren sie den Satz von Herbrand im Speziallfall nur einer Variablen: *Sei $\phi(x)$ eine quantorenfreie Formel in einer Sprache L, die mindestens eine Konstante enhält. Dann ist $\exists x \phi(x)$ genau dann allgemeingültig, wenn...*

c) Was ist das Vereinigungsmengenaxiom von ZFC?

d) Was ist eine rekursive Funktion?

e) Was sind die Axiome des Systems Q? (*Hinweis:* Das sind sechs Axiome mit den rekursiven Definitionen von $+, \cdot, <$).