نظریه‌ی مدلِ ۲- مارتین زیگلر- تابستان ۲۰۱۵

گردآورنده: م. خانی

۲ شهریور ۱۳۹۴

چکیده

جزوه‌ی پیش‌رو، یادداشت‌هائی است که من در کلاسِ درسِ نظریه‌ی مدلِ مارتین زیگْلِرْ [۱]، در فرایبورگ در تابستانِ سالِ ۱۳۹۴ برداشته‌ام. جزوه‌ی این درس مطابق با کتابی است که وی به همراه با کاترین تِنْت [۲] نوشته است و ازاین‌رو نوشتن آن شاید کاری عَبَث بنماید! بااین‌حال، جزوه، دارای بی‌نظمی و نابسامانیِ خاصی است که همیشه فهم آن را آسان‌تر از فهم کتاب می‌کند. به‌ویژه در برخی اثبات‌ها، وارد جزئیاتی شده‌ایم که در کتاب به آن‌ها پرداخته نشده است. علاوه بر این نقدهائی بر انشای کتاب دارم که انگیزه‌ی مرا در نوشتن این جزوه تقویت کرده‌اند. حل تمرین‌های این درس به‌عهده‌ی خودم بوده است. خواننده می‌تواند تمرین‌ها را به زبان آلمانی در تارنمای شخصیم به نشانی زیر بیابد:

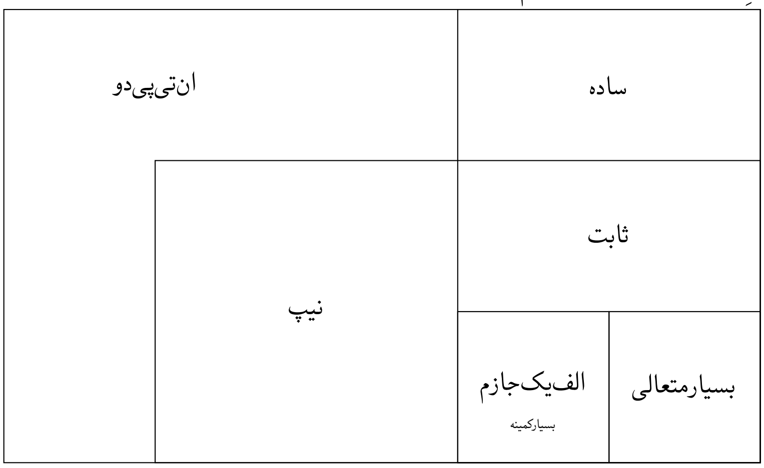
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/khani/Modelltheorie2.html

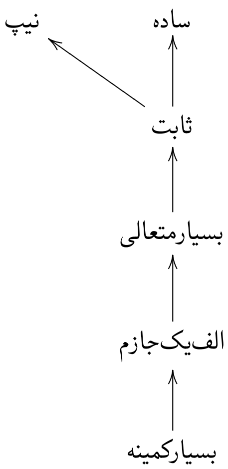
[۱] Martin Ziegler

[۲] Katrin Tent

جلسه‌ی اول

قرار است دسته‌بندیِ زیر را برای تئوری‌هابفهمیم:



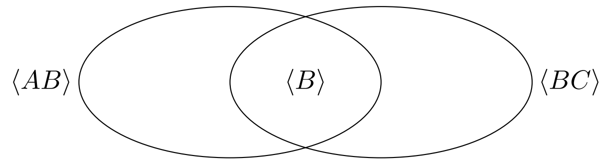


مثالِ ۱ (از انواعِ تئوری‌ها). ان‌تی‌پی‌دو: $\prod Q_p/U$؛ نیپ: RCf؛ الف‌یک‌جازم: ACFp؛ بسیارمتعالی: DCF؛ ثابت: تئوری کاملِ R ـ مدول‌ها، مثلا تئوریِ کاملِ $(\mathbb{Z}, \circ, +, -)$؛ ساده: گراف‌های تصادفی، و میدان‌های سودومتناهی: $\mathrm{Th}(\prod F_q/U)$ برای q هائی که توانی از یک عدد اولِ p اند.

قضیه‌ی ۲. نیپ $\cap$ ساده $=$ ثابت.

هدف: در این درس خواهیم دید که در تئوری‌های ساده تعبیر مناسبی برای مفهوم «استقلال» داریم. در زیر چند نُمود از این استقلال را آورده‌ایم. از نمادِ لنگر برای نمایش استقلال استفاده خواهیم کرد. گاهی با بالانویس‌هایی، نوع لنگر موردعلاقه‌مان را مشخص خواهیم کرد: $\mathop{\smile\hskip-0.9em^{|}\ }^{d}$، $\mathop{\smile\hskip-0.9em^{|}\ }$ و ... .

مثالِ ۳. Kفضاهای برداری به گونه‌ی $(V, \circ, +, -, \lambda)_{\lambda\in K}$. در این فضاها $A \mathop{\smile\hskip-0.9em^{|}\ }_B C$ بیانگرِ رویدادی است که که در تصویر زیر آمده است.



مثالِ ۴. در تئوری‌های بسیار کمینه، $A \underset{B}{\downarrow} C$ اگروتنهااگر A و C روی B نسبت به پیش‌هندسه‌ی موجود، مستقلِ جبری باشند. توجه کنید که تصویرِ مثالِ قبل برای نمایشِ $A \underset{B}{\downarrow} C$ در این‌جا به کار نمی‌آید. در فضاهای بسیارکمینه، بستار جبری، پیش‌هندسه است. در این فضاها، $A \underset{B}{\downarrow} C$ هرگاه

$$\dim(a/BC) = \dim(a/B).$$

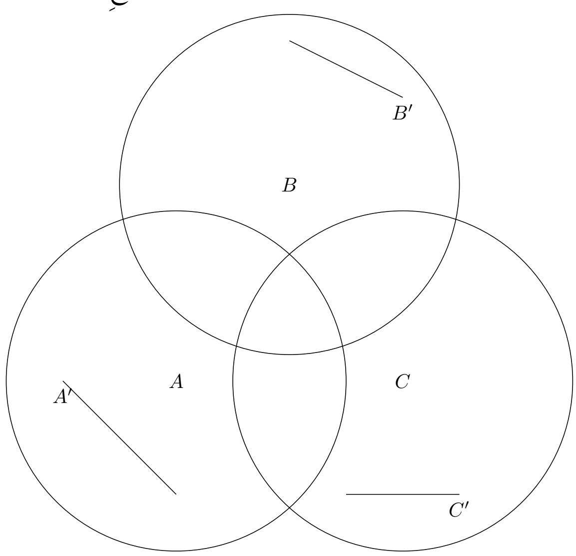
و این وقتی که روی می‌دهد که

$$A' \subseteq A \quad B' \subseteq B \quad C' \subseteq C$$

به گونه‌ای پیدا شوند که A', B', C' از هم (به تعبیرِ بستارجبری) مستقلند و

$$\operatorname{acl}(A'B') \supset A \quad \operatorname{acl}(B') \supset B \quad \operatorname{acl}(B'C') \supset C$$

و A', B', C' مانند شکل زیر باشند. برای توضیحِ بیشتر صفحاتِ آخرِ این جزوه (اینجا) را بخوانید.



مثالِ ۵. درگراف‌های تصادفی، استقلال مفهومی بدیهی می‌یابد:

$$A \underset{B}{\downarrow} C \Leftrightarrow (A - B) \cap (C - B) = \emptyset \Leftrightarrow (AB) \cap (BC) = B.$$

بحث را رسماً آغاز می‌کنیم.

تعریفِ ۶. فرمولِ $\phi(x,b)$ روی A بخش می‌شود هرگاه یک عدد طبیعیِ k و یک دنباله‌ی نامتناهیِ $b_0 b_1 \ldots$ پیدا شوند به‌گونه‌ای‌که برای هر i داشته‌باشیم $\mathrm{tp}(b_i/A) = \mathrm{tp}(b/A)$، و $\{\phi(x,b_i) | i < \omega\}$ یک مجموعه‌ی kناسازگار از فرمول‌ها باشد.

مثالِ ۷. $\phi(x,b) = \neg x \doteq x$. هر فرمولِ ناسازگار ناسازگار روی هر مجموعه‌ای بخش می‌شود.

مثالِ ۸. اگر فرمولِ $\phi(x,b)$ در A برآورده‌شدنی باشد، روی A بخش نمی‌شود. (علت: اگر $a \models \phi(x,b)$ آن‌گاه برای همه‌ی b_i های با تایپ یکسان با تایپ b روی A، داریم $a \models \phi(a,b_i)$.)

لمِ ۹. فرمولِ $\phi(x,b)$ روی A بخش می‌شود اگروتنهااگر یک دنباله‌ی Aبازنشناختنیِ $b = b_0 b_1 \ldots$ داشته باشیم به‌گونه‌ای‌که $\{\phi(x,b_i) | i < \omega\}$ ناسازگار باشد.

دقت کنید که در تعریف بالا گفته‌ایم ناسازگار، ولی در تعریفِ ۶ گفته‌بودیم kناسازگار. هم‌چنین به این که در لمِ بالا دنباله‌ی ما با خودِ b آغاز می‌شود توجه داشته باشید.

اثبات. $\Leftarrow$ بدیهی است.
$\Rightarrow$ فرض کنید $b_0 b_1 \ldots$ شاهدِ بخش‌شدن باشد. لمِ استاندارد را (که در پائین یادآوری کرده‌ایم) بر $b_0 b_1 \ldots b_n / A$ اعمال کنید و به یک دنباله‌ی بازنشناختنیِ $b'_0 b'_1 \ldots$ برسید. داریم $\mathrm{tp}(b'_i/A) = \mathrm{tp}(b/A)$ و $\{\phi(x,b_i) | i < \omega\}$ یک مجموعه‌ی kبازنشناختنی از فرمول‌هاست. تنها، مانده است که به شرطِ $b_0 = b$ برسیم. ازآن‌جاکه $\mathrm{tp}(b'_0/A) = \mathrm{tp}(b/A)$، اتومرفیسمی هست که b'_0 را به b می‌برد. تصویرِ دنباله‌ی $b'_0 b'_1 \ldots$ تحتِ این اتومرفیسم، دنباله‌ای را که می‌جستیم بدست می‌دهد. $\square$

ملاحظه‌ی ۱۰ (لمِ استاندارد). فرض کنید دنباله‌ی نامتناهیِ $b_0 b_1 \ldots$ داده شده باشد. آن‌گاه یک دنباله‌ی بازنشناختنیِ $b'_0 b'_1 \ldots$ پیدا می‌شود با این ویژگی که هرگاه برای همه‌ی $i_n < \ldots < i_1$ داشته باشیم $\models \psi(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}, \bar{a})$، آن‌گاه همین را برای b'_i ها داریم. این لم برای ترتیب‌های خطیِ نامتناهیِ دلخواهِ I, I' و دنباله‌های $(b_i)_{i \in I}$ و $(b'_i)_{i \in I'}$ نیز درست است. توجه داشته باشید که در این لم، به یک دنباله‌ی بازنشناختنی می‌رسیم که موضعاً (برای هر فرمول) شبیه دنباله‌ی اولیه است. در ادامه خواهیم دید که با به‌کارگیریِ لمِ شلاخ می‌توان به دنباله‌ای بازنشناختنیِ بهتری رسید. قضیه‌ی ۶۴ و چهارچوب پس از آن را بخوانید.

تکرار:

> به تفاوت میان دنباله‌های حاصل در لم‌های استاندارد شلاخ توجه کنید. در لمِ استاندارد، دنباله‌ی بازنشناختنی حاصل، موضعاً شبیه دنباله‌ای است که داریم. بدین معنی که برای هر فرمول اگر $\models \phi(a'_{j_1} \ldots a'_{j_n})$ آن‌گاه اندیس‌های $i_n < \ldots < i_1$ پیدا شوند که $\models \phi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$. در لمِ شلاخ، با یک دنباله‌ی خیلی دراز شروع می‌کنیم ولی دنباله‌ی بازنشناختنی بدست آمده دارای این ویژگی است که برای هر $j_n < \ldots < j_1$ اندیس‌های $i_n < \ldots < i_1$ پیدا می‌شوند که
>
> $$\mathrm{tp}(a'_{j_1} \ldots a'_{j_n}/A) = \mathrm{tp}(a_{i_1}, \ldots a_{i_n}/A)$$

به بیان غیررسمی، لمِ رمزی می‌گوید

$$\forall(a_i) \quad \underbrace{\exists(a'_i)}_{\text{بازنشناختنی}} [\forall\phi\big(\forall i_1 < \ldots < i_n \phi(a_{i_1}\ldots a_{in})\big) \to \phi(a').]$$

و لم شلاخ می‌گوید

$$\forall \underbrace{(a_i)}_{\text{بسیار بلند}} \quad \exists \underbrace{(a'_i)}_{\text{بازنشناختنی}} \underbrace{\forall i_1 < \ldots < i_n}_{a' \text{ اندیسهای}} \quad \exists \underbrace{j_1 < \ldots < j_n}_{a \text{ اندیسهای}}$$

$$[\forall\phi(\phi(a'_{i_1}, \ldots, a'_{i_n}) \leftrightarrow \phi(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}))]$$

تعریفِ ۱۱. فرض کنید $\pi(x)$ یک مجموعه از فرمول‌ها باشد (یک تایپِ جزئی). می‌گوئیم $\pi(x)$ روی A بخش می‌شود، هرگاه یک فرمولِ $\phi(x,b)$ داشته باشیم که $\pi(x) \vdash \phi(x,b)$ و $\phi(x,b)$ روی A بخش شود. پس یک تایپ کامل زمانی بخش می‌شود که شاملِ یک فرمولِ بخش‌شونده باشد. در ادامه نمادِ $a \perp^d_A B$ بیانگر این است که $\mathrm{tp}(a/AB)$ روی A بخش نمی‌شود.

ملاحظه‌ی ۱۲. اگر $\phi'(x,b') \vdash \phi(x,b)$ آنگاه بخش‌کردنِ $\phi(x,b)$ روی A، بخش‌کردنِ $\phi'(x,b')$ را روی A نتیجه می‌دهد. (یعنی بیش از این که پارامتر مهم باشد، مجموعه‌ی تعریف‌شده مهم است).

اثبات. برای $b_1 \ldots b_\circ$، دنباله‌ی $b'_\circ b'_1 \ldots$ را به‌گونه‌ای انتخاب کنید که $\mathrm{tp}(b'_i b_i) = \mathrm{tp}(b'b)$. داریم $\phi'(x,b'_i) \models \phi(x,b_i)$. □

لمِ ۱۳. تایپِ جزئیِ $\pi(x,b)$ (که در آن b ممکن است نامتناهی هم باشد) روی A بخش می‌شود اگروتنهااگر دنباله‌ی روی A بازنشناختنیِ $b = b_\circ \ldots$ را به‌گونه‌ای داشته‌باشیم که $\bigcup_{i<\omega} \pi(x,b_i)$ ناسازگار باشد.

ملاحظه‌ی ۱۴. بنا به لمِ بالا، داریم $a \perp^d_A b$ اگروتنهااگر برای هر دنباله‌ی روی A بازنشناختنیِ $b = b_\circ b_1 b_2 \ldots$ بدانیم که $\bigcup_{i=\circ,\ldots} p(x,b_i)$ سازگار است؛ که در آن گرفته‌ایم $p(x,b) = \mathrm{tp}(a/bA)$.

رفعِ ابهام. وقتی می‌گوییم $\bigcup_{i=\circ,\ldots} p(x,b_i)$ سازگار است که در آن گرفته‌ایم $p(x,b) = \mathrm{tp}(a/bA)$؛ معنیش این نیست که $\bigcup \mathrm{tp}(a/b_i A)$ سازگار است. توجه کنید که

$$\phi(x,b_i) \in \bigcup_{i=\circ,\ldots} p(x,b_i) \Leftrightarrow \models \phi(a,b).$$

نتیجه‌ی ۱۵. $a \perp^d_A b$ اگروتنهااگر هر دنباله‌ی Aبازنشناختنیِ $b = b_\circ \ldots$ دارای یک Abکُپیِ $b = b'_\circ b'_1 \ldots$ باشد که روی Aa بازنشناختنی است.

ملاحظه‌ی ۱۶. B $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\mid}^{d}_{A} B$ اگروتنهااگر برای همه‌ی b های متناهیِ در B داشته باشیم $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\mid}^{d}_{A} b$.

اثباتِ‌نتیجه‌ی ۱۵. بگیرید $\pi(x,b) = \mathrm{tp}(a/Ab)$. فرض کنید $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\mid}^{d}_{A} b$ و فرض کنید که دنباله‌ی $b = b_0 b_1 \ldots$ داده شده باشد که روی A بازنشناختنی است. آن‌گاه $\bigcup \pi(x, b_i)$ سازگار است. فرض کنید a' یکی از برآورده‌گرانِ آن باشد. لمِ استاندارد را بر $b_0 b_1 \ldots / Aa'$ به کار ببندید. با این کار به یک Aکُپیِ $b'_0 b'_1 \ldots$ می‌رسیم که روی Aa' بازنشناختنی است و به‌گونه‌ای است که $a' \models \bigcup_{i<\omega} \pi(x, b'_i)$. ازآن‌جا که $\models \pi(a', b'_0)$، چنین است که $\mathrm{tp}(a'b'_0/A) = \mathrm{tp}(ab/A)$. بنابراین می‌شود فرض کرد که $a' = a$ و $b'_0 = b$. اثباتِ سوی دیگر بر عهده‌ی خواننده باشد! $\square$

جلسه‌ی دوم

با چند یادآوری کوتاه از مطالب درس پیش می‌آغازیم. نمادِ $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\mid}^{d}_{A} b$ یعنی $\mathrm{tp}(a/bA)$ روی A بخش نمی‌شود. هم‌چنین ثابت کردیم که $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\mid}^{d}_{A} b$ اگروتنهااگر هر دنباله‌ی روی A بازنشناختنیِ $b_0 b_1 \ldots$ دارای یک A کپیِ (معادلاً دارای یک Ab کپیِ) $b = b'_0 b'_1 \ldots$ باشد که روی Aa بازنشناختنی است.

ملاحظه‌ی ۱۷. $C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\mid}^{d}_{A} B$ اگروتنهااگر برای هر چندتائیِ متناهیِ $\bar{c} \in C$ و هر چندتائیِ متناهیِ $\bar{b} \in B$ داشته باشیم $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\mid}^{d}_{A} \bar{b}$. توجه کنید که آنچه نوشته‌ایم تعریف نیست بلکه از ویژگی‌های بخش‌شدن است.

گزاره‌ی ۱۸ (ویژگیِ تعدّی از راست برای $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\mid}^{d}$).

$$a \underset{A}{\overset{d}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\mid}}} B, c \underset{Aa}{\overset{d}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\mid}}} B \Rightarrow ac \underset{A}{\overset{d}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\mid}}} B.$$

توجه کنید که عبارتِ سمتِ راست همواره یکسان مانده است.

اثبات. فرض کنید I یک دنباله‌ی بازنشناختنی روی A باشد و $b \in I$. ازآنجاکه $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\mid}^{d}_{A} B$، یک دنباله‌ی $I' \equiv_{Ab} I$ داریم که روی Aa بازنشناختنی است. ازآن‌جا که $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\mid}_{Aa} b$، یک دنباله‌ی $I'' \equiv_{Aab} I'$ داریم که روی Aca بازنشناختنی است. $\square$

ویژگیِ تعدی از چپ ویژگی‌ای است که با عوض کردن عبارات دو طرف لنگر بدست می‌آید و لزوماً همیشه برقرار نیست. مثالِ آن را در تمرینات آورده‌ام (دی‌ال‌او).

گزاره‌ی زیر همواره درست نیست: (در تئوری‌های ثابت درست است)
هرگاه $p \subseteq q \subseteq r$ گسترش‌های بخش‌نشونده (نافُرک) باشند آن‌گاه r گسترش بخش‌نشونده‌ای (نافُرکی) از p است.

ویژگیِ ۱:

$$ac \underset{A}{\overset{d}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\mid}}} B \Rightarrow a \underset{A}{\overset{d}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\mid}}} B$$

ویژگیِ ۲.

$$ac \underset{A}{\overset{d}{\downarrow}} B \Rightarrow c \underset{Aa}{\overset{d}{\downarrow}} B$$

ویژگیِ ۱ همیشه برقرار است. ویژگیِ ۲ را تئوری‌های ساده دارند ولی همیشه برقرار نیست. مثال نقضی برای ویژگیِ ۲ بیابید!

تعریفِ ۱۹ (فُرکیدن). $\pi(x)$ روی A می‌فُرکد هرگاه $\pi(x) \vdash \phi_1(x, b_1) \vee \ldots \vee \phi_n(x, b_n)$ که در آن هر کدام از $\phi_i(x, b_i)$ ها روی A بخش می‌شوند.

یادآوریِ ۲۰. واژه‌های فارسیِ پیشنهادیِ من برای این مفهوم، هم فُرکیدن است و هم چَنیدن. خوبیِ اوّلی این است که به واژه‌ی انگلیسیِ رساننده‌ی این مفهوم شبیه است و خوبی دومی فارسی‌تر بودن آن و شباهتش به چنگال و چندشاخه‌شدن است.

نمادگذاری ۲۱. نمادِ $a \downarrow_A b$ یعنی $\mathrm{tp}(a/Ab)$ روی A نمی‌فُرکد.

اگر $\pi(x)$ روی A بخش شود، روی آن هم‌چنین می‌فُرکد؛ ازاین‌رو

$$a \underset{A}{\downarrow} b \Rightarrow a \underset{A}{\overset{d}{\downarrow}} b.$$

مثالِ ۲۲. اگر T بسیارمتعالی باشد، آن‌گاه

$$a \underset{A}{\downarrow} B \Leftrightarrow \mathrm{RM}(a/AB) = \mathrm{RM}(a/A).$$

لمِ ۲۳. اگر $\pi(x)$ در A متناهیاًبرآورده‌شدنی باشد، روی آن نمی‌فُرکد.

اثبات. اگر $\pi(x) \vdash \bigvee_i \phi_i(x, b_i)$ آن‌گاه هر یک از ϕ_i ها در A برآورده می‌شوند و از این رو هیچ یک روی A بخش نمی‌شوند. $\square$

ملاحظه‌ی ۲۴. همواره داریم $a \downarrow^d_A A$؛ بااین‌حال (در تئوری‌های ناساده)، $a \not\downarrow_A A$ نیز رخ‌دادنی است.

لمِ ۲۵. فرض کنید $A \subseteq B$ و $\pi(x)$ یک تایپِ جزئی روی B باشد. اگر π روی A نفُرکد یک تایپِ کاملِ $p \in S(B)$ داریم که شاملِ π باشد و روی A نفُرکد (π را می‌توان به یک تایپِ کامل نافُرک گسترش داد).

ملاحظه‌ی ۲۶. بیان دیگری از لمِ بالا؛ با ملاحظه‌ی ۵۳ مقایسه شود.

$$a \underset{A}{\downarrow} A \quad A \subseteq B \Rightarrow \quad \exists b \quad b \equiv_A a \quad b \underset{A}{\downarrow} B.$$

ملاحظه‌ی ۲۷. بیان دیگر.

$$A \subseteq B \subseteq C \quad a \underset{A}{\downarrow} B \Rightarrow \quad \exists b \quad b \equiv_B a \quad b \underset{A}{\downarrow} C.$$

اثبات. فرمول $\phi(x,b)$ را در نظر بگیرید. یا $\pi(x)\cup\{\phi(x,b)\}$ یا $\pi(x)\cup\{\neg\phi(x,b)\}$ روی A نمی‌فرکند؛ زیراکه اگر هر دوی این‌ها بفرکند π می‌فرکد. بنابراین می‌توان با انتخابِ گسترشِ ماکزیمال، به یک تایپ کامل رسید. $\square$

ملاحظه‌ی ۲۸. فرض کنید $A\subseteq B\subseteq C$ و $a\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A B$. آن‌گاه یک $a'\equiv_B a$ داریم که $a'\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A C$. برای اثباتِ این در لم بالا بگیرید $\pi=\mathrm{tp}(a/B)$. به این رویداد، «بَرکشیِ نافرک تایپ‌ها» می‌گویند. خواهیم دید که در تئوری‌های ساده رابطه‌ی قوی‌تری برقرار است: برای همه‌ی $a,B\subseteq C$ یک $a'\equiv_B a$ هست که $a'\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_B C$.

چند ویژگیِ ساده از بخش‌شدن را دوباره نوشته‌ام:

یادآوریِ ۲۹.

$$a\underset{A}{\overset{d}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}}} b_1b_2 \Rightarrow a\underset{A}{\overset{d}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}}} b_1$$

$$a\underset{A}{\overset{d}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}}} b_1b_2 \Rightarrow a\underset{b_1A}{\overset{d}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}}} b_2$$

$$a\underset{A}{\overset{d}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}}} b \quad c\underset{Aa}{\overset{d}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}}} b \Rightarrow ac\underset{A}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}} b$$

جلسه‌ی سوم، سادگی

تعریفِ ۳۰. تایپِ جزئیِ π را ساده [3] می‌خوانیم هرگاه هیچ فرمولِ نتیجه‌شونده‌ی $\phi(x,y)$ از آن برای هیچ k دارای ویژگیِ kدرختی نباشد. (ویژگیِ kدرختی را در ادامه تعریف کرده‌ایم).

ملاحظه‌ی ۳۱. T را بسیارمتعالی [4] می‌خوانیم هرگاه در آن هیچ درختی از فرمول‌های سازگار نداشته باشیم. یعنی هیچ درختی از فرمولهای $\phi_s(x,a_s)$ که در آن $s\in\omega^{<\omega}$ نداشته باشیم که در آن هر $\phi_s(x)=\phi_s(x,a_s)$ سازگار است و $\phi_{si}(x,a_{si})\rightarrow\phi_s(x)$ و $\forall x\neg(\phi_{s0}(x)\wedge\phi_{s1}(x))$. بنا به تعریفِ معادل، T بسیار متعالی است هرگاه در آن هیچ درختی از فرمول‌ها نداشته باشیم که در آن $\phi_{s0}\wedge\phi_{s1}$ ناسازگار باشد و برای همه‌ی $\delta\in 2^{<\omega}$ مجموعه‌ی $\{\phi_s(x)|s\in\delta\}$ سازگار باشد. برای رسیدن به تعریف اول از تعریف دوم کافی است بگیریم: $\phi_s=\bigwedge_{t\subseteq s}\psi_t$.

تعریفِ ۳۲ (ویژگیِ kدرختی). می‌گوئیم فرمولِ $\phi(x,y)$ دارای ویژگیِ kدرختی است هرگاه a_s هائی برای $s\in\omega^{<\omega}$ داشته‌باشیم به‌گونه‌ای‌که

[3] simple

[4] totally transcendental

۱. $\{\phi(x,a_{si})|i<\omega\}$ برای هر s، مجموعه‌ای kناسازگار باشد.

۲. $\{\phi(x,a_s)|s\subset\delta\}$ برای هر $\delta\in\omega^{<\omega}$ سازگار باشد. تصویر کشیده شود.

در این جا نمی‌شود مشابه حالت بسیار متعالی عطفِ $\bigwedge\psi_i$ را در نظر گرفت و تعریفی برای درخت‌های سازگار ارائه داد.

سوالِ ۳۳. آیا در تعریف ویژگیِ درختی در نظر گرفتنِ فرمولهای با $|x|=1$ کافی است؟

پاسخ این پرسش، مثبت است. با کمک ویژگی‌های بیان شده در یادآوریِ ۲۹ می‌توان ثابت کرد که T ساده است اگر و تنها اگر هیچ فرمولی چون $\phi(x,y)$ با $|x|=1$، ویژگیِ درختی نداشته باشد و اگروتنهااگر برای هر تایپِ $p\in S_1(B)$ یک زیرمجموعه‌ی کوچکِ $(|A|\leq|T|)$ $A\subseteq B$ داشته باشیم که p روی A بخش نشود. این را نیز درتمرین‌ها آورده‌ام. عموماً در نظریه‌ی مدل ویژگی‌ها را برای چندتائی‌ها تعریف می‌کنند و سپس ثابت می‌کنند که در نظر گرفتن تک‌متغیر کافی است. در زیر چند نمونه آورده‌ایم. این مفاهیم در جلسات بعد کامل معرفی خواهند شد.

تعریفِ ۳۴. می‌گوئیم T نیپ [5] است هرگاه هیچ فرمولِ $\phi(x,y)$ با ویژگیِ استقلال نداشته باشیم. یعنی هیچ دنباله‌ای مانند $(a_i)_{i<\omega}$ نداشته باشیم که برای هر زیرمجموعه‌ی $I\subset\omega$ مجموعه‌فرمولِ

$$\{\phi^{i\in I}(x,a_i)|i<\omega\}$$

سازگار باشد. وقتی می‌گوئیم مجموعه‌فرمول $\{\phi^{i\in I}(x,a_i)|i<\omega\}$ سازگار است یعنی مجموعه‌ی زیر سازگار است:

$$\{\phi(x,a_i)|i\in I\}\cup\{\neg\phi(x,a_i)|i\notin I\}.$$

ملاحظه‌ی ۳۵. نیپ را کافی است با فرضِ $|x|=1$ تعریف کنیم.

تعریفِ ۳۶. T را ثابت می‌خوانیم هرگاه هیچ فرمولی در آن دارای ویژگیِ ترتیبی نباشد. ویژگیِ ترتیبی، یعنی دنباله‌ای چون $(a_i)_{i<\omega}$ داشته‌باشیم که برای هر $j\in\omega$ مجموعه‌ی

$$\{\phi^{i<j}(x,a_i)|i<\omega\}$$

سازگار باشد. تعریف معادل: $\models\phi(b_j,a_i)\Leftrightarrow i<j$.

ملاحظه‌ی ۳۷. برای تعریف بالا نیز $|x|=1$ بسنده است.

ملاحظه‌ی ۳۸. ثابت= نیپ+ ساده.

لمِ ۳۹. فرض کنید A یک مجموعه باشد و $\phi(x,y)$ یک فرمول. آنگاه ϕ دارای ویژگیِ k درختی است اگروتنهااگر یک دنباله‌ی $k-\phi$بخشی (بخوانید فی‌کِیْ‌بخشی) روی A داشته باشیم. منظور، دنباله‌ای است مانند $a_0a_1\ldots$ با این دو ویژگی:

[5] NIP, not the independence property

۱. هر $\phi(x,a_i)$ روی $Aa_{<i}$، kبخش می‌کند.

۲. $\{\phi(x,a_i)|i<\omega\}$ سازگار است.

اثبات. $\Leftarrow$ با کمک قضیه‌ی فشردگی به یک درختِ $(a_s, s\in\kappa^{<\omega})$ برای ویژگی درختی با هر بزرگیِ دلخواهِ κ می‌توان رسید. در این‌جا κ را بزرگ‌تر از $2^{|T|+|A|}$ بگیرید. در هر طبقه‌ی s از درخت، تعدادِ نامتناهی a_i دارای تایپ یکسانی روی $Aa_{<s}$ هستند؛ بدین علت که $\kappa > |S(Aa_{<i})|$. دنباله‌ی خواسته‌مان را با برداشتنِ یک عنصر از میان این عناصرِ با تایپِ یکسان می‌سازیم.
$\Rightarrow$. فرض کنید $(a_i)_{i\in\omega}$ یک دنباله‌ی $k-\phi$بخشی باشد. برای هر n دنباله‌ی a_n^i را چنان بسازید که $\mathrm{tp}(a_n^i/Aa_{<i}) = \mathrm{tp}(a_n/Aa_{<i})$ و $\{\phi(x,a_n^i)\}_{i\in\omega}$ مجموعه‌ای kناسازگار باشد. بلافاصله به یک درخت (a_s) می‌رسیم که در آن $a_{s\restriction 0}a_{s\restriction 1}\dots a_{s\restriction n}\equiv_A a_0\dots a_n$ $\square$

تعریفِ ۴۰. فرض‌کنید Δ مجموعه‌ای متناهی از فرمول‌ها باشد. دنباله‌ی $(\phi_i(x,a_i)|i<\delta)$ از فرمول‌ها را یک دنباله‌ی $k-\Delta$بخشی می‌خوانیم هرگاه

۱. $\phi_i(x,y)\in\Delta$

۲. $\phi_i(x,y)$ روی $Aa_{<i}$، kبخش شود.

گفتیم که اگر ϕ دارای ویژگیِ kدرختی باشد، آنگاه دنباله‌ای $k-\phi$بخشی پیدا می‌شود.

نتیجه‌ی ۴۱. اگر یک دنباله‌ی $k-\Delta$بخشی از اندازه‌ی ω داشته باشیم، آن‌گاه یک فرمولِ $\phi\in\Delta$ با ویژگیِ kدرختی یافت می‌شود.

گزاره‌ی ۴۲. شماره‌های زیر با هم معادلند:

۱. T ساده است.

۲. برای هر $p\in S(B)$ یک $A\subseteq B$ هست که $|A|\le|T|$ و p روی A بخش نمی‌شود.

۳. یک k هست که برای هر مُدلِ M و هر $p\in S(M)$ یک $A\subseteq M$ داشته باشیم که $|A|\le k$ و p روی A بخش نشود.

مثالِ ۴۳. دی‌اِل‌اُ ساده نیست. فرض کنید M یک مدل از آن باشد که در آن یک زنجیره‌ی نزولی از بازه‌ها به گونه‌ی زیر هست:

$$(a_0,b_0)\supset(a_1,b_1)\supset\dots(a_\alpha,b_\alpha),\alpha<\delta.$$

فرض کنید $p\in S(M)$ تایپی باشد که همه‌ی فرمول‌های $a_\alpha<x<b_\alpha$ را دربرداشته باشد. هر فرمولِ $a_\alpha<x<b_\alpha$ روی $\{a_\beta b_\beta|\beta<\alpha\}$ بخش می‌شود. p روی هر مجموعه‌ی A که اندازه‌ی آن از δ اکیداً کمتر باشد بخش می‌کند. درواقع، فرمولِ $a<x<b$ دارای ویژگیِ ۲درختی است.

اثباتِ گزاره‌ی ۴۲. ۲ $\Rightarrow$ ۱ فرض کنید $p \in S(B)$ نمونه‌ای ناقضِ ۲ باشد. یعنی برای هر $A \subseteq B$ که $|A| \leq T$ فرمولی چون $\phi(x,a) \in p$ داشته باشیم که روی A بخش شود. یک دنباله‌ی $(a_\alpha)_{\alpha<|T|^+}$ در p پیدا می‌شود که در آن هر a_α روی $a_{<\alpha}$، k_α بخش می‌شود. این دنباله دارای زیردنباله‌ای به درازی $|T|^+$ است که در آن همه‌ی ϕ_α ها و k_α ها یکی‌اند $(\phi, k =)$. این فرمولِ ϕ دارای ویژگیِ kدرختی است.

۱ $\Rightarrow$ ۳ فرض کنید ϕ و k مثال نقضی برای ۱ فراهم آورده باشند. آنگاه یک دنباله‌ی $\phi - k$ بخشیِ $(\phi(x,a_\alpha)|\alpha < k^+)$ از درازی دلخواهِ k^+ پیدا می‌شود. حواسمان باشد که برای شماره‌ی ۳ نیاز به مُدِل داریم. اگر شماره ی ۲ بود، راحت می‌گرفتیم $B = \{a_\alpha|\alpha < k\}$ و $p \supset \{\phi(x,a_\alpha)|\alpha < k\}$. اکنون نیاز به حکمی داریم که در تمرین زیر آمده است.

تمرین ۴۴. فرض کنید $\phi(x,b)$ روی A بخش شود و $A \subseteq C$. دراین‌صورت یک $b' \equiv_A b$ هست که $\phi(x,b')$ روی C بخش می‌شود.

ادامه‌ی اثبات. از این نتیجه می‌گیریم که یک دنباله‌ی صعودی از مدل‌های M_α و عناصرِ $a_{<\alpha} \subseteq M_\alpha$ داریم که $\phi(x,a_\alpha)$ روی M_α بخش می‌شود. بگیرید $M = \bigcup M_\alpha$ و فرض کنید p تایپی باشد که همه‌ی $\phi(x,a_\alpha)$ ها را دربردارد. هر $A \subseteq M$ که اندازه‌اش از k کوچک‌تر باشد در یکی از M_α ها می‌اُفتد. $\square$

تمرین ۴۵. می‌گوئیم فرمول $\phi(x,y)$ دارای ویژگیِ ترتیبی است هرگاه دنباله‌هائی چون $(a_i, b_i|i < \omega)$ داشته‌باشیم که

$$\models \phi(b_j, a_i) \Leftrightarrow j < i.$$

یعنی $\phi(x,a_i)$ روی $B = \{b_j|j < \omega\}$ یک زنجیر از زیرمجموعه‌ها تعریف کند. می‌گوییم این فرمول ویژگی ترتیبیِ اکید دارد هرگاه دنباله‌ای چون $(a_i)_{i\in\omega}$ داشته‌باشیم که $\phi(-,a_i)$ یک زنجیر نامتناهی نزولی به دست دهد. برای مثال فرمولِ $x < y$ در دی‌الاُ چنین است. نشان دهید که ویژگیِ ترتیبی اکید، ناسادگی را سبب می‌شود.

حقیقتِ ۴۶ (شلاخ). ثابت = نیپ + نداشتن ویژگی ترتیبیِ اکید (نه سُپ)

تمرین ۴۷. ثابت $\Leftarrow$ ساده (ویژگی درختی $\Leftarrow$ ویژگی ترتیبیِ اکید)

نتیجه‌ی ۴۸. ثابت: نیپ + ساده.

جلسه‌ی چهارم

قضیه‌ی ۴۹. اگر T ساده باشد و $p \in S(A)$، آنگاه p روی A نمی‌فرکد (یعنی همواره داریم $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A A$).

اثبات. می‌دانیم که در تئوری‌های ساده، یک کران بالا برای درازیِ دنباله‌های $k-\Delta$بخشی داریم. نشان خواهیم داد که اگر فرمولی بفُرکد، دنباله‌های $k - \Delta$ بخشی‌ای با طول دلخواه یافت می‌شود و این ناقض ساده بودن است. فرض کنید $p \vdash \bigvee_{i<k} \phi_i(x,b)$ که هر ϕ بخش می‌شود. بگیرید $\Delta = \{\phi_i(x,y)|i < k\}$.

ادّعای ۵۰. به هر درازیِ دلخواه، دنباله‌ای $k-\Delta$ بخشی روی A پیدا می‌شود.
یادآوری می‌کنیم که یک دنباله‌ی $k-\Delta$بخشی سازگار با p به طولِ n دنباله‌ای به شرح زیر است.
فرمول‌هایی دارد مانند $\psi_\circ(x,b),\dots,\psi_{n-۱}(x,a_{n-۱})$
$\psi_i\in\Delta$.
$\{\psi_i(x,a_i)|i<n\}$ سازگار است (با p سازگار است).
$\psi_i(x,a_i)$ روی $Aa_{<i}$ بخش می‌شود.

اثبات ادّعا. فرض کنید $(\psi_i(x,a_i)|i<n)$ یک دنباله‌ی $k-\Delta$بخشی روی A باشد که با $p(x)$ سازگار است.

تمرین ۵۱. اگر $\phi(x,b)$ روی A بخش شود و $A\subseteq C$ آن‌گاه یک $C'\equiv_A C$ هست که $\phi(x,b)$ روی C' بخش می‌شود. (گفتنی است که نسخه‌ی دیگر این تمرین، تمرینِ ۴۴ است که می‌گفت: فرض کنید $\phi(x,b)$ روی A بخش شود و $A\subseteq C$. دراین‌صورت یک $b'\equiv_A b$ پیدا می‌شود که $\phi(x,b')$ روی C بخش می‌شود. در این‌جا از نکته‌ی درون پرانتزها استفاده نشده است!)

بنا به تمرین بالا یک $b'\equiv_A b$ یافت می شود به‌گونه‌ای که دنباله‌ی $\{\psi_i(x,a_i)|i<n\}$ یک دنباله‌ی بخشی روی Ab' باشد. یکی از فرمول‌های $\phi_i(x,b')$ با $p(x)\cup\{\psi_i(x,a_i)|i<n\}$ سازگار است؛ فرض کنید $\phi_\circ(x,b')$ چنین باشد. در این صورت دنباله‌ی زیر، $k-\Delta$ بخشی و سازگار با p خواهد بود.

$$\phi_\circ(x,b'),\psi_\circ(x,a_\circ),\dots,\psi_{n-۱}(x,a_{n-۱})$$

□

□

پایان اثباتِ قضیه.

نتیجه‌ی ۵۲. فرض کنید T ساده باشد و $p\in S(A)$ و $A\subseteq B$. آن‌گاه یک گسترشِ $p\subseteq q\in S(B)$ داریم که در آن q روی A نمی‌فرکد.

ملاحظه‌ی ۵۳. بیان دیگرِ نتیجه‌ی بالا. به این عبارت، خاصیتِ «وجود» نیز گفته می‌شود. با ملاحظه‌ی ۲۶ مقایسه شود.

$$\underbrace{a}_{\text{داده‌شده}}\quad A\subseteq B\quad \exists b\quad b\equiv_A a\quad b\underset{A}{\downarrow} B.$$

اثبات. می‌دانیم که p روی A نمی‌فرکد. نیز می‌دانیم که اگر $A\subseteq B$ و π یک تایپ جزئی روی B باشد که روی A نمی‌فرکد، آن‌گاه می‌توان π را به یک تایپ کامل $p\in S(B)$ گستراند که روی A نمی‌فرکد. اگر π را

همان p روی B بگیریم، آنگاه اگر این تایپ روی A نفرکد گسترشی به یک q دارد که q تایپی روی B است و روی A می‌فرکد. $\square$

تعریفِ ۵۴. فرض کنید I یک ترتیبِ خطّی باشد و $\mathcal{I} = (a_i|i \in I)$ دنباله‌ای باشد از چندتائی‌ها و A یک مجموعه باشد از پارامترها.

۱. دنباله‌ی $\mathcal{I}$ را روی A مستقل می‌خوانیم هرگاه $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A a_{<i}$.

۲. این دنباله را روی A مُرلی می‌خوانیم هرگاه علاوه بر مستقل بودن، روی A بازنشناختنی نیز باشد.

۳. هم‌چنین $\mathcal{I}$ را یک دنباله‌ی مُرلی در p روی A می‌خوانیم هرگاه علاوه بر شماره‌ی بالا، همه‌ی عناصرِ این دنباله برآورده‌گرِ $p(x)$ باشند.

ملاحظه‌ی ۵۵. فرض کنید $A \subseteq B$ و $p \in S(B)$ تایپی باشد که روی A نمی‌فُرکد. آنگاه برای هر κ یک دنباله‌ی $(a_i)_{i<\kappa}$ از برآورده‌گرانِ p پیدا می‌شود که $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A Ba_{<i}$.

بیانِ دیگر.

$$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A B \Rightarrow \forall\kappa \quad \exists(a'_i)_{i\in\kappa} \quad a'_i \equiv_B a \quad a'_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A Ba'_{<i}.$$

اثبات. فرض کنید $a_{<i}$ ساخته شده باشد. تایپِ p یک گسترشِ نافرک به $q \in S(Ba_{<i})$ دارد. بگذارید $a_i \models q$. چنین ساختی، خوب به نظر می‌رسد ولی متأسفانه دنباله‌ی به دست‌آمده‌ی (a_i) لزوماً روی A بازنشناختنی نیست. پیش از حل این مشکل کمی بحث را ادامه می‌دهیم.

مثالِ ۵۶. فرض کنید $p \subseteq \mathbb{P} \in S(\mathfrak{C})$. فرض کنید $\mathbb{P}$ روی A ناوردا باشد. حال a_i ها را طوری برگزینید که $a_i \models p \restriction Aa_{<i}$. در این صورت به هر درازیِ λ می‌توان دنباله‌ای مرلی روی A چون $a_0 a_1 \dots (i < \lambda)$ یافت. برای نمونه در دی‌الاُ $p(x) = $ “$A < x$” و $\mathbb{P}(x) = $ “$\mathfrak{C} < x$”. ویژگی‌های یاد شده را دارند.

اثباتِ مثال. فرض کنید (a_i) و (a'_i) دو دنباله‌ی این‌چنینی باشند. نشان می‌دهیم که $(a_i)_{i<\lambda} \equiv_A (a'_i)_{i<\lambda}$. فرض کنید $a_{<i} \equiv_A a'_{<i}$. بنابراین یک $\alpha \in Aut(\mathfrak{C}/A)$ داریم که $\alpha(a_{<i}) = a'_{<i}$. هم‌چنین داریم $\alpha(a_i) \models \alpha(\mathbb{P}) \restriction A_{a'_{<i}} = \mathbb{P} \restriction A_{a'_{<i}}$. پس $a_{\leq i} \equiv_A a'_{\leq i}$. پس همه‌ی زیردنباله‌های (a_i) دارای تایپ یکسانیند؛ یعنی $(a_i)_{i<\lambda}$ روی A بازنشناختنی است. علاوه‌براین $\mathbb{P}$ روی A نمی‌فرکد (زیراکه ناوردا است)، پس $\mathbb{P} \restriction Aa_{<i}$ نیز روی A نمی‌فرکد، یعنی $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;\mid}_A Aa_{<i}$. $\square$

تعریفِ ۵۷ (شریک ارث). فرض کنید M یک مدل باشد و $M \subset A$ و $q \in S(A)$. می‌گوییم q شریک‌اِرثِ $q|M$ است هرگاه q در M متناهیاًبرآورده‌شدنی باشد.

مثالِ ۵۸. $A = M$ و $q \in S(M)$ دلخواه.

تمرین ۵۹. فرض کنید $q \in S(A)$ شریک ارث $q|M$ باشد و $A \subseteq A'$. آنگاه q گسترشی به A' دارد به نامِ q' که آن هم شریک ارثی برای $q|M$ است.

ملاحظه‌ی ۶۰. q شریک‌ارث است اگروتنهااگر $q \supseteq \{\phi(x,a) | M \subseteq \phi(\mathfrak{C}, a), a \in A\}$.

تمرین ۶۱. q شریک‌ارث است اگروتنهااگر $q = \{\phi(x,a) | \phi(M,a) \in U, a \in A\}$ که در آن U یک فرافیلتر روی M است.

لمِ ۶۲. فرض کنید $A \subseteq B$ و $p \in S(B)$ روی A نفُرکد. آنگاه یک دنباله‌ی مُرلیِ $(a_i)_{i<\omega}$ از p روی A داریم که روی B بازنشناختنی باشد.

اثبات. فرض کنید $(a_i)_{i<k}$ یک دنباله مُرلی از p روی A باشد، شبیه آنچه می‌خواهیم با این امتیاز که در آن k یک کاردینالِ رمزی بزرگ‌تر از $|B|$ است. این دنباله، زیردنباله‌ای خواهد داشت به طول ω که روی B بازنشناختنی است. از بختِ بد، کاردینال‌های رمزی همیشه پیدا نمی‌شوند.
قضیه رمزی را به یاد آورید:

$$k \to (\lambda)^n_\mu.$$

کاردینالِ k را فشرده‌ی ضعیف می‌خوانیم هرگاه

$$\kappa \to (\kappa)^2_2.$$

کاردینالِ κ را رمزی می‌خوانیم هرگاه

$$\kappa \to (\kappa)^{<\omega}_2$$

داریم: کاردینال‌های دست‌نیافتنی $\supset$ کاردینال‌های فشرده‌ی ضعیف $\supset$ کاردینال‌های رمزی $\supset$ کاردینال‌های قابل‌اندازه‌گیری.

ملاحظه‌ی ۶۳. اگر

$$\kappa \to (\omega)^{<\omega}_\lambda$$

(به عبارت دیگر اگر یک کاردینال رمزی به گونه‌ی بالا بداریم) و $\lambda = |S(A)|$، آنگاه هر دنباله‌ی $(a_i)_{i<\kappa}$ یک زیردنباله‌ی نامتناهیِ بازنشناختنی روی A دارد.

قضیه‌ی ۶۴ (شلاخ). برای هر مجموعه‌ی پارامترِ داده‌شده‌ی A یک کاردینالِ κ هست که برای هر دنباله‌ی $(a_i)_{i<\kappa}$ یک دنباله‌ی $(a'_i)_{i<\omega}$ داشته باشیم که روی A بازنشناختنی باشد و چُنان باشد که برای هر $j_1 < \ldots < j_n$ اندیس‌های $i_1 < \ldots < i_n$ پیدا شوند که

$$\mathrm{tp}(a'_{j_1} \ldots a'_{j_n}/A) = \mathrm{tp}(a_{i_1}, \ldots a_{i_n}/A)$$

به تفاوت میان دنباله‌های حاصل در لم‌های استاندارد شلاخ توجه کنید. در لمِ استاندارد، دنباله‌ی بازنشناختنی حاصل، موضعاً شبیه دنباله‌ای است که داریم. بدین معنی که برای هر فرمول اگر $\models \phi(a'_{j_1} \dots a'_{j_n})$ آن‌گاه اندیس‌های $i_1 < \dots < i_n$ پیدا شوند که $\models \phi(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$. در لمِ شلاخ، با یک دنباله‌ی خیلی دراز شروع می‌کنیم ولی دنباله‌ی بازنشناختنی بدست آمده دارای این ویژگی است که برای هر $j_1 < \dots < j_n$ اندیس‌های $i_1 < \dots < i_n$ پیدا می‌شوند که

$$\mathrm{tp}(a'_{j_1} \dots a'_{j_n}/A) = \mathrm{tp}(a_{i_1}, \dots a_{i_n}/A)$$

به بیان غیررسمی، لمِ رمزی می‌گوید

$$\forall (a_i) \quad \underbrace{\exists (a'_i)}_{\text{بازنشناختنی}} [\forall \phi \big(\forall i_1 < \dots < i_n \phi(a_{i1} \dots a_{in})\big) \to \phi(a').]$$

و لم شلاخ می‌گوید

$$\forall \underbrace{(a_i)}_{\text{بسیار بلند}} \quad \exists \underbrace{(a'_i)}_{\text{بازنشناختنی}} \underbrace{\forall i_1 < \dots < i_n}_{a' \text{ اندیسهای}} \quad \exists \underbrace{j_1 < \dots < j_n}_{a\text{اندیسهای}}$$
$$[\forall \phi(\phi(a'_{i_1}, \dots, a'_{i_n}) \leftrightarrow \phi(a_{j_1}, \dots, a_{j_n}))]$$

در اثباتِ قضیه‌ی بالا از لمِ اردوش ـ رادو بهره گرفته می‌شود:

لمِ ۶۵ (اردوش ـ رادو). برای هر μ، λ و n می‌توان یک κ چُنان یافت که

$$\kappa \to (\lambda)^n_\mu;$$

به بیان دقیق‌تر

$$\beth_n(\kappa)^+ \to (\kappa^+)^n_k$$

که در عبارت بالا «ب» ها به‌گونه‌ی زیر تعریف می‌شوند:

$$\beth_0(\kappa) = \kappa, \beth_{n+1}(\kappa) = 2^{\beth_n(\kappa)}.$$

جلسه‌ی پنجم

یادآوریِ ۶۶ (لمِ شلاخ). برای هر مجموعه‌ی پارامترِ A یک کاردینالِ λ هست آن‌گونه که برای هر دنباله‌ی $(a_i)_{i \in I}$ با $|I| = \lambda$ یک دنباله‌ی Aبازنشناختنیِ $(b_i)_{i<\omega}$ پیدا شود با این ویژگی که هر تایپِ $\mathrm{tp}(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}/A)$ برای $i_1 < \dots < i_n$ پیش‌تر در $(a_i)_{i \in I}$ آمده باشد.

نتیجه‌ی ۶۷. اگر تایپِ $p \in S(B)$ روی A نفُرکد، یک دنباله‌ی نامتناهیِ مُرلی در p روی A پیدا می‌شود که روی B بازنشناختنی است. (به‌ویژه برای هر $p \in S(A)$ نیز یک دنباله‌ی مرلیِ نامتناهی روی A در p پیدا می‌شود.)

اثبات. کاردینالِ λ را همانندِ آنچه موردنیازِ لمِ شلاخ است بگیرید. دنباله‌ی $(a_i)_{i<\lambda}$ را چنان بگیرید که $a_i \models p$ و $a_i \downarrow_A Ba_{<i}$. بیان دقیق‌تر: تایپِ $p' \supseteq p$ را چنان برگزینید که $p' \in S(Ba_{<i})$ و p' روی A نفرکد. وجودِ این تایپ را نتیجه‌ی ۵۲ توجیه می‌کند. به‌ویژه داریم $a_i \downarrow_A a_{<i}$. آن‌چه کم داریم بازنشناختنی بودن این دنباله روی B است. لمِ شلاخ را به کار گیرید. به یک دنباله‌ی $(b_i)_{i<\omega}$ می‌رسیم که روی B بازنشناختنی است. حال دو ادّعا:

- $b_i \downarrow_A b_{<i}$

  علت: کافی است برای هر زیرمجموعه‌ی متناهیِ J از i نشان دهیم که $b_i \downarrow_A b_J = \{b_j | j \in J\}$. اکنون a'_i و a'_J را چنان برگزینید که $\mathrm{tp}(b_ib_J/A) = \mathrm{tp}(a'_ia'_J)$. اثباتِ ادّعا از این‌که $a'_i \downarrow_A a'_J$ به‌دنبال می‌آید.

- $b_i \models p$

  علت: عناصر a'_i را چنان برگزینید که $\mathrm{tp}(b_i/B) = \mathrm{tp}(a'_i/B) = p$.

□

ملاحظه‌ی ۶۸. دنباله‌ای را که در نتیجه‌ی بالا بدان اشاره شده است، می‌توان با هر درازیِ دل‌خواه یافت. (برای اثبات این از لمِ استاندارد استفاده کنید).

با لمِ استاندارد و لمِ شلاخ آشنائید و می‌دانید که هر دو برای یافتن دنباله‌ی بازنشناختنی با تایپِ دلخواه به کار می‌آیند. به لمِ زیر توجه کنید. در این لم می‌بینید که برای یافتن دنباله‌ای بازنشناختنی که تایپِ مشابهی با یک دنباله‌ی بازنشناختنیِ داده‌شده دارد، نیازی به استفاده از آن دو لم نیست و تنها استفاده از لمِ فشردگی بسنده است.

لمِ ۶۹. فرض کنید $(a_i)_{i\in\omega}$ یک دنباله‌ی بازنشناختنی روی B باشد و فرض کنید I یک ترتیبِ خطیِ داده‌شده باشد. آن‌گاه (بدون نیاز به رمزی) یک دنباله‌ی (بازنشناختنی) $(b_i)_{i\in\omega}$ روی B پیدا می‌شود که

$$\mathrm{tp}(b_{i_1}\dots,b_{i_{n-1}}/B) = \mathrm{tp}(a_0,\dots,a_{n-1}/B).$$

اثبات. بگیرید: $\sigma(x_i)_{i\in I} = \{\phi(x_{i_0},\dots x_{i_{n-1}}) | \models \phi(a_0,\dots,a_{n-1})\}$ □

یادآوریِ ۷۰. فرض کنید $\pi(x,b)$ یک تایپِ جزئی باشد. این تایپ روی A بخش نمی‌شود، هرگاه برای هر دنباله‌ی رویAبازنشناختنیِ $b = b_0 \dots$، مجموعه‌ی $\bigcup_{i<\omega}\pi(x,b_i)$ سازگار باشد. بنابراین $a \downarrow^d_A b$ هرگاه $\bigcup_{i\in\omega} p(x,a_i)$ سازگار باشد؛ آنجا که گرفته‌ایم: $p(x,a_0) = \mathrm{tp}(b/Aa_0)$ (یعنی داریم $\phi(x,a_i) \in \bigcup p(x,a_i)$ اگروتنهااگر $\models \phi(b,a_0)$).

در گزاره‌ی زیر خواهیم دید که هرگاه T ساده باشد کافی است حکم یادآوریِ بالا تنها برای یک دنباله‌ی از نوع مطلوب برقرار باشد.

گزاره‌ی ۷۱. فرض کنید T ساده است. فرض کنید $b = b_\circ \dots$ یک دنباله‌ی مُرلی روی A باشد. آن‌گاه $\pi(x,b)$ روی A بخش نمی‌شود اگروتنهااگر $\bigcup_{i<\omega} \pi(x,b_i)$ سازگار باشد.

گسترش. می‌توان اثبات کرد که دنباله‌ی مُرلیِ بیان شده در بالا دنباله‌ای چون $(b_i)_{i\in I}$ است که در آن I نوع‌ترتیبیِ $(|T|^+)^{\text{برعکس}}$ دارد.

اثبات. فرض کنید c یک برآورنده‌ی $\bigcup_{i\in I} \pi(x,b_i)$ باشد. ازآن‌جا که T ساده است، یک زیرمجموعه‌ی کوچکِ B از $\{b_i | i\in I\} \cup A$ پیدا می‌شود که $\mathrm{tp}(c/\{b_i|i\in I\}\cup A)$ روی B بخش نمی‌شود. پس یک $i_\circ \in I$ داریم که $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{d}_{Ab_{>i_\circ}} b_I$؛ و بویژه $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{d}_{Ab_{>i_\circ}} b_{i_\circ}$. ازآن‌جا که $(b_i)_{i\in I}$ مستقلِ‌بخشی است، نتیجه می‌گیریم که $b_{>i_\circ} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{A} b_{i_\circ}$. این ادعای آخر پیروِ لم زیر است.

لمِ ۷۲. اگر دنباله‌ی $(a_i)_{i\in I}$ روی A ناوابسته باشد و $J < K$ دو زیرمجموعه از I باشند (یعنی هر دو، زیرمجموعه‌ی I باشند و همه‌ی اعضای K از کُلِّ اعضای I بزرگ‌تر باشند) آن‌گاه $a_J \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{A} a_K$.

این لم را پس از پایان اثباتِ گزاره، ثابت خواهیم کرد. اکنون به کمکِ خاصیت تعدی‌ازراست می‌رسیم به $cb_{>i_\circ} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{A} b_{i_\circ}$. خاصیت تعدی از راست را به یاد آرید که می‌گفت:

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{d}_{B} X, C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{AB} X \Rightarrow AC \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{B} X.$$

ازآن‌جاکه $\pi(x,b_{i_\circ}) \subseteq \mathrm{tp}(c/Ab_{i_\circ})$ نتیجه می‌گیریم که $\pi(x,b_{i_\circ})$ روی A بخش نمی‌کند. □

اثباتِ لمِ ۷۲. این لم را به استقراء روی $|K|$ ثابت می‌کنیم. فرض کنید $K = K \cup \{k'\}$. داریم

$$a_K \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{d}_{A} a_{Jk'} \Rightarrow a_K \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{Aa_{k'}} a_J$$

توجه کنید که دریافتِ زیر بدیهی است:

$$\boxed{A \subseteq B \subseteq C \quad x \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{d}_{A} C \Rightarrow x \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{d}_{A} B, x \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{d}_{B} C}$$

بنا به فرض استقراء داریم $a_{k'} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{A} a_J$. اکنون بنا به تعدی‌ازراست داریم $a_{k'K} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{A} a_J$. □

نتیجه‌ی ۷۳. اگر T ساده باشد، آن‌گاه

بخش شدن = فُرکیدن.

اثبات. فرض کنید $\pi(x,b)$ روی A بفرکد. از این‌رو $\pi(x,b)\models\bigvee_{i<n}\phi_i(x,b')$ که در آن هر یک از ϕ_i ها روی A بخش می‌شوند. فرض کنید $(b'_i)_{i<\omega}$ یک دنباله‌ی مُرلی در $\mathrm{tp}(b'/A)$ باشد. آنگاه $\bigcup_{l<\omega}\phi_l(x,b'_l)$ ناسازگار است. به پیرویِ این، $\bigcup_{i<\omega}\bigvee_{l<n}\phi_l(x,b'_i)$ ناسازگار است (چراکه اگر c برآورنده‌ای از این مجموعه می‌بود، آنگاه برای هر i یک l می‌داشتیم که $\models\phi_l(c,b'_i)$. در این صورت l ای می‌داشتیم که برای نامتناهی‌عدد i، $\models\phi_l(c,b'_i)$. و از این برمی‌آمد که $\bigcup_{i<\omega}\phi_l(x,b'_i)$ سازگار است که این تناقض است). پس $\pi(x,b)$ روی A بخش نمی‌شود. $\square$

گزاره‌ی ۷۴ (ویژگیِ تقارن). اگر T ساده باشد

$$a\mathop{\downarrow}_{B}c\Leftrightarrow c\mathop{\downarrow}_{B}a.$$

اثبات. فرض کنید $c\downarrow_B a$. آنگاه دنباله‌ای مُرلی روی B هم‌چون (a_i) در تایپِ $\mathrm{tp}(a/Bc)$ پیدا می‌شود. بگیرید $p(a,y)=\mathrm{tp}(c/Ba)$. آنگاه c مجموعه‌ی $\bigcup_{i<\omega}p(a_i,y)$ را برمی‌آورد. یعنی این مجموعه سازگار است. بنابراین $p(a,y)$ روی A بخش نمی‌شود، در نتیجه $c\downarrow^d_B a$ که بنا بر هم‌ارزیِ فرکیدن و بخش‌کردن ثابت‌شده در نتیجه‌ی ۷۳ می‌رسیم به $c\downarrow_B a$. $\square$

نتیجه‌ی ۷۵ (یکنوایی و تعدّی). فرض کنید T ساده باشد. داریم

$$A\subseteq B\subseteq C\Rightarrow (x\mathop{\downarrow}_{A}C\Leftrightarrow x\mathop{\downarrow}_{A}B \text{ و } x\mathop{\downarrow}_{B}C)$$

لمِ ۷۶. فرض کنید T ساده است. فرض کنید I یک دنباله‌ی نامتناهیِ مُرلی روی A باشد که روی Ac بازنشناختنی است. آنگاه $c\downarrow_A I$.

ملاحظه‌ی ۷۷. با فرض اینکه $I=(b_i|i\in I)$ ازپیش می‌دانیم که $c\downarrow_A b_i$. در لم ۷۲ دیدیم که اگر $p(c,y)=\mathrm{tp}(b_i/Ac)$ آنگاه $\models p(c,b_j)$ برای هر $j\in I$. بنا به لمِ ۷۲ $b_i\downarrow^d_A c$ که از آن‌جا که T ساده است نتیجه می‌شود که $c\downarrow_A b_i$.

حال k را ثابت بگیرید. فرض کنید $\bar{b}_i=\underbrace{b_{ik}\dots b_{(i+1)k-1}}_{b}$ دنباله‌ی $\bar{I}=(\bar{b}_i|i\in\omega)$ روی A مُرلی و روی Ac بازنشناختنی است. بازنشناختنی بودنش روی Ac آسان است. استقلال آن روی A پیروِ لم ۷۲ به دست می‌آید. با منطقِ بحث‌های بالا نتیجه می‌گیریم که $c\downarrow_A\bar{b}_i$. و از این‌ها می‌رسیم به $c\downarrow_A I$.

نتیجه‌ی ۷۸. تقارن + تعدّی + یکنوایی $\Leftarrow$ استقلالِ دنباله‌ی $(a_i)_{i\in I}$ به ترتیبِ روی I هیچ بستگی‌ای ندارد.

تمرین ۷۹. تمرینِ ۸-۲-۷

جلسه‌ی ششم

قضیه‌ی ۸۰. در تئوری‌های ساده، قضیه‌ی وابستگی درست است.

نگاه به جلو:

قضیه‌ی ۸۱. فرض کنید T کامل باشد. فرض کنید در T رابطه‌ای هست هم‌چون $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$ که ویژگی‌های زیر را داراست:

آ. یکنوائی و تعدّی:

$$a \underset{A}{\downfree} BC \Leftrightarrow a \underset{A}{\downfree} B \text{ و } a \underset{AB}{\downfree} C$$

ب. تقارن:

$$a \underset{A}{\downfree} b \Rightarrow b \underset{A}{\downfree} a$$

ج. مشخصه‌ی متناهی:

$$a \underset{A}{\downfree} B \Leftrightarrow \forall \underbrace{\bar{b}}_{\text{متناهی}} \in B \quad a \underset{A}{\downfree} \bar{b}$$

د. مشخصه‌ی موضعی: کاردینالی داریم چون k به‌گونه‌ای‌که برای هر a و B، یک $B_\circ \subseteq B$ پیدا شود که $|B_\circ| \leq \kappa$ و $a \downfree_{B_\circ} B$.

ه. هستندگی (وجود به عربی). برای هر a, A, C یک $a' \equiv_A a$ هست که $a' \downfree_A C$.

و. استقلال روی مدل‌ها: این را در ادامه جداگانه بررسی می‌کنیم.

اگر T یک تئوریِ کاملِ دل‌خواه باشد و $\downfree^{\circ}$ رابطه‌ای باشد که ویژگی‌های یاد شده را داراست، آن‌گاه T ساده است و $\downfree = \downfree^{\circ}$.

قضیه‌ی ۸۲ (استقلال). فرض کنید M یک مدل باشد و داشته باشیم

$$b \underset{M}{\downfree} B, B \underset{M}{\downfree} C, C \underset{M}{\downfree} c$$

و

$$\operatorname{tp}(b/M) = \operatorname{tp}(c/M);$$

آن‌گاه یک d داریم که

$$B \underset{M}{\downfree} d, d \underset{M}{\downfree} C$$

(حتی بیشتر از این:

$$d \underset{M}{\downfree} BC),$$

و

$$\operatorname{tp}(b/B) = \operatorname{tp}(d/B)$$

و

$$\operatorname{tp}(d/C) = \operatorname{tp}(c/C).$$

ایده برای اثبات. بگیرید $p = \mathrm{tp}(b/M) = \mathrm{tp}(c/M)$. اگر q و q' به‌ترتیب گسترش‌های نافرکانی از این تایپ به B و C باشند آن‌گاه یک گسترش یکسان از هر دوی این‌ها به BC خواهیم داشت که روی M نمی‌فرکد. $\square$

اثباتِ قضیه‌ی بالا در جلسه‌ی هفتم آمده‌است.

ملاحظه‌ی ۸۳. در تئوری‌های ثابت، وجودِ یکتای تایپ‌های نافرکان روی مدل‌ها را می‌دانیم. در پیِ این، قضیه‌ی استقلال روی مدل‌ها برای این تئوری‌ها نیز درست است.

مثالِ ۸۴. فرض کنید T تئوریِ گراف‌های‌تصادفی باشد. تعریف می‌کنیم

$$a \underset{A}{\downarrow} B \Leftrightarrow a \cap B \subseteq A \text{ یا } (a - A) \cap (B - A) = \emptyset.$$

ویژگی‌های آ، ب، ج و د درستند (و تحقیق آنها آسان است). ویژگی‌های دیگر را بررسی کنید.

تعریفِ ۸۵. تعریف می‌کنیم $\mathrm{nc}_A(a, b)$ اگروتنهااگر a و b به ترتیب عناصرِ آغازینِ اول و دومِ یک دنباله‌ی بازنشناختنی روی A باشند. گفتنی است که nc از حروف اول عبارتِ no clique گرفته شده است. در زبان فارسی کلیک را «گروهک» ترجمه کرده‌اند. منظور از گروهک در نظریه‌ی گراف، مجموعه‌ای از رئوس است که میان هر دو عضو آن یالی باشد.

تعریفِ ۸۶. فرمولِ $\theta(x, y)$ را ضخیم [6] می‌خوانیم هرگاه هیچ دنباله نامتناهی‌ای چون $c_0, c_1, \ldots$ یافت نشود که در آن برای هر $i < j$ داشته باشیم $\not\models \theta(c_i, c_j)$. یعنی برای هر دنباله‌ی نامتناهی $c_0, c_1, \ldots$ دو عنصر $i < j$ داشته باشیم که $\models \theta(c_i, c_j)$.

لمِ ۸۷. داریم $\mathrm{nc}_A(a, b)$ اگروتنهااگر برای همه‌ی فرمول‌های ضخیمِ $\theta(x, y)$ روی A داشته باشیم $\models \theta(a, b)$.

اثباتِ لمِ ۸۷. بگیرید $p(x, y) = \mathrm{tp}(a, b/A)$. آن‌گاه $\mathrm{nc}_A(a, b)$ اگروتنهااگر یک دنباله‌ی بازنشناختنی روی A هم‌چون $c_0, c_1 \ldots$ داشته باشیم که جملات اول آن a, b اند. داریم

$(\mathrm{tp}(c_0, c_1/A) = p) \Leftrightarrow_{\text{لم استاندارد}}$ (یک دنباله‌ی $c_0 c_1 \ldots$ داشته باشیم که برای هر $i < j$،
$(\mathrm{tp}(c_i, c_j) = p) \Leftrightarrow_{\text{فشردگی}}$ (برای هر $\psi(x, y)$ یک دنباله‌ی $c_0 c_1 \ldots$ داشته‌باشیم که برای هر $i < j$،
$(\psi(c_i, c_j)) \Leftrightarrow$ (اگر فرمولِ $\neg\psi(x, y)$ ضخیم باشد $\Leftarrow$ $\psi \notin p$) $\Leftrightarrow$ (اگر θ ضخیم باشد آن‌گاه $\theta \in p$).

$\square$

نتیجه‌ی ۸۸. اگر $\mathrm{tp}(a/M) = \mathrm{tp}(b/M)$ آن‌گاه یک c داریم که $\mathrm{nc}_M(a, c)$ و $\mathrm{nc}_M(c, b)$.

ملاحظه‌ی ۸۹. اگر $\mathrm{nc}_M(a, b)$ آن‌گاه $\mathrm{tp}(a/M) = \mathrm{tp}(b/M)$.

تمرین ۹۰. اگر $\mathrm{nc}_A(a, b)$ آن‌گاه یک مدلِ $A \subset M$ داریم که $\mathrm{tp}(a/M) = \mathrm{tp}(b/M)$.

[6] thick

بنا به تعریف، $Lstp(a/A) = Lstp(b/A)$ یعنی a, b هر دو در رابطه‌ای واقعند که بستارِ متعدی $\mathrm{nc}_A(a,b)$ است و آن برابراست با بستار متعددی رابطه‌ی «وجود مدلیِ چون $M \supset A$ به‌گونه‌ای‌که $\mathrm{tp}(a/M) = \mathrm{tp}(b/M)$».

اثباتِ ۸۸. فرض کنید فرمول $\phi(x,y)$ روی M ضخیم باشد. فرض کنید $c_0 \dots c_n$ دنباله‌ای ماکزیمال باشد که شرطِ $i < j \to \neg \not\models \theta(c_i, c_j)$ را برمی‌آورد. آن‌گاه $M \models \forall y \bigvee_{i<n} \theta(c_i, y)$. از آن‌جا که M مدل است داریم $\models \bigvee_{i<n} \theta(c_i, a)$. پس برای یک c_i داریم $\models \theta(c_i, a)$ و ازاین‌رو داریم $\models \theta(c_i, b)$. تااین‌جا نشان داده‌ایم که برای هر فرمولِ ضخیمِ $\theta(x,y)$ روی M یک c پیدا می‌شود که $\theta(c,a) \wedge \theta(c,b)$. بنا به فشردگی یک c پیدا می‌شود که برای همه‌ی فرمول‌های θ داشته باشیم $\theta(c,a) \wedge \theta(c,b)$ (مجموعه‌ی $\Sigma(x,a,b) = \{\theta(x,a) \wedge \theta(x,b) | M$ ضخیم روی $\theta\}$ را در نظر بگیرید.) $\square$

ملاحظه‌ی ۹۱. فرض کنید $\mathrm{tp}(b_0/A) = \mathrm{tp}(b_1/A)$ و a_0 دلخواه باشد. آن‌گاه a_1 ای داریم که

$$\mathrm{tp}(a_0 b_0/A) = \mathrm{tp}(a_1 b_1/A).$$

لمِ ۹۲. فرض کنید T یک تئوریِ کاملِ دلخواه باشد. فرض کنید داشته‌باشیم $\mathrm{nc}(b_0, b_1)$ و a_0 عنصری دلخواه باشد. بعلاوه فرض کنید که $b_0 b_1 b_2 \dots$ دنباله‌ای بازنشناختنی روی A باشد به‌گونه‌ای‌که $b_1 b_2 \dots$ روی $Aa_0 b_0$ بازنشناختنی است. آن‌گاه یک a_1 یافت می‌شود که

$$\mathrm{nc}_A(a_0 b_0, a_1 b_1).$$

اثبات. فرض می کنیم که A تهی است. داریم $\mathrm{tp}(b_0 b_1 \dots) = \mathrm{tp}(b_i b_{i+1} \dots)$؛ زیراکه دنباله‌ی $b_0 b_1 \dots$ بازنشناختنی است. عناصر a_i را به‌گونه‌ای انتخاب کنید که داشته باشیم $\mathrm{tp}(a_i b_i b_{i+1} \dots) = \mathrm{tp}(a_0 b_0 b_1 \dots)$. حال بنا به لم استاندارد، یک دنباله‌ی $a'_i b'_i$ به شکل

$$a'_0 \dots$$
$$b'_0 \dots$$

را چنان می‌توان یافت موضعاً شبیه شکل زیر باشد:

$$a_0 a_1 \dots$$
$$b_0 b_1 \dots.$$

اکنون از آن‌جا که $b_0 b_1 \dots$ بازنشناختنی است، می‌دانیم که $\mathrm{tp}(b'_0 b'_1 \dots) = \mathrm{tp}(b_0 b_1 \dots)$. هم‌چنین ازآن‌جاکه $b_1 b_2 \dots$ روی $a_0 b_0$ بازنشناختنی است، برای هر $0 < i_1 < \dots < i_n$ داریم

$$\mathrm{tp}(a_0 b_0 b_{i_1} \dots b_{i_n}) = \mathrm{tp}(a_0 b_0 \dots b_n)$$

بنابراین پس از عطف‌گیری برای هر $i_0 < i_1 < \ldots$ داریم

$$\mathrm{tp}(a_{i_0} b_{i_0} b_{i_1} \ldots) = \mathrm{tp}(a_0 b_0 b_1 \ldots).$$

بنابراین

$$\mathrm{tp}(a'_{i_0} b'_{i_0} \ldots) = \mathrm{tp}(a_0 b_0 \ldots).$$

معنی عبارت بالا این است که بی‌کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که

$$a'_0 b'_0 \ldots = a_0 b_0 \ldots.$$

بگیرید $a_1 = a'_1$. □

جلسه‌ی هفتم، قضیه‌ی استقلال و اثبات آن

یادآوری می‌کنیم که $\mathrm{nc}_A(a,b)$ اگر وتنها اگر یک دنباله ی $abb_1b_2\ldots$ داشته باشیم که روی A بازنشناختنی است. هم‌چنین ثابت کردیم که اگر $\mathrm{tp}(a/M) = \mathrm{tp}(b/M)$ آن‌گاه یک c داریم که $\mathrm{nc}_M(a,c)$ و $\mathrm{nc}_M(c,b)$. از این نتیجه گرفتیم که بستارِ متعددی دو رابطه‌ی

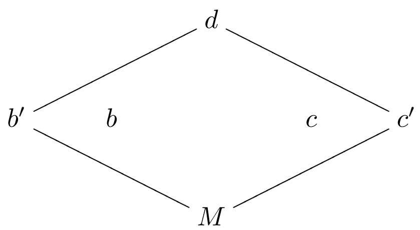
$$\exists M \supseteq A \quad \mathrm{tp}(a/M) = \mathrm{tp}(b/M)$$

و

$$\mathrm{nc}_A(a,b)$$

یکی است.

هدف: می‌خواهیم در این جلسه قضیه‌ی استقلال را ثابت کنیم:



اگر مطابق شکل بالا داشته باشیم:

$$b \mathop{\downarrow}_{M} b'$$

$$b \mathop{\downarrow}_{M} c$$

$$c' \mathop{\downarrow}_{M} c$$

$$\mathrm{tp}(b'/M) = \mathrm{tp}(c'/M)$$

آن‌گاه d ای پیدا می‌شود که

$$\operatorname{tp}(d/Mb) = \operatorname{tp}(b'/Mb)$$
$$\operatorname{tp}(d/Mc) = \operatorname{tp}(c'/Mc)$$
$$d \underset{M}{\downarrow} bc.$$

لمِ ۹۳. اگر $\operatorname{nc}_A(b,b')$ و $a \downarrow_A b, b'$ آن‌گاه یک a' پیدا می‌شود که $\operatorname{nc}_A(ab, a'b')$.

لمِ ۹۴. اگر $\phi(x,a)$ روی A نفرکد آن گاه از $\operatorname{nc}_A(a,b)$ نتیجه می‌شود که $\phi(x,a) \wedge \phi(x,b)$ روی A نمی‌فرکد.

لمِ ۹۵. فرض کنید $\phi(x,a) \wedge \phi(x,b)$ روی A نفرکد و $a \downarrow_A bb'$ برای یک مدلِ $A \subseteq M$ داشته باشیم $\operatorname{tp}(b/M) = \operatorname{tp}(b'/M)$؛ آن‌گاه $\phi(x,a) \wedge \phi(x,b')$ روی A نمی‌فُرکد.

اثبات. فرض کنید c چنان باشد که $\operatorname{nc}_A(b,c)$ و $\operatorname{nc}_A(b',c)$ (بنا به لمِ ۸۸). می‌توان c را به‌گونه‌ای یافت که $c \downarrow_{Abb'} a$ و در نتیجه‌ی آن $bb'c \downarrow_A a$. نیاز به لم زیر داریم:

لمِ ۹۶. اگر $\phi(x,a) \wedge \phi(x,b)$ روی A نفرکد و $b, b' \downarrow_A a$ و $\operatorname{nc}_A(b,b')$ آن‌گاه $\phi(x,a) \wedge \phi(x,b')$ روی A نمی‌فرکد.

اثبات. بنا به ۹۳ یک a' داریم که $\operatorname{nc}_A(ab, a'b')$. بنا به ۹۴ فرمولِ $\phi(x,a) \wedge \phi(x,b) \wedge \phi(x,a') \wedge \phi(x,b')$ روی A نمی‌فرکد. □

ادامه‌ی اثبات. با گرفتن لم ۹۶ دو بار به کار، می‌رسیم به این که $\phi(x,a) \wedge \phi(x,c)$ روی A نمی فرکد و $\phi(x,a) \wedge \phi(x,b')$ نیز روی A نمی فرکد. □

نتیجه‌ی ۹۷. فرض کنید

$$b' \underset{M}{\downarrow} b$$
$$b \underset{M}{\downarrow} c$$
$$c \underset{M}{\downarrow} c'$$
$$\models \phi(b',b) \wedge \psi(c,c')$$
$$\operatorname{tp}(b'/M) = \operatorname{tp}(c'/M)$$

(شبیه به تصویری که برای قضیه‌ی استقلال کشیده‌ایم)

آن‌گاه فرمول $\phi(x,b) \wedge \psi(c,x)$ روی A نمی‌فُرکد.

از این قرار است قضیه‌ی استقلال نتیجه شود. بگیرید $p(x,b) = \mathrm{tp}(b'/Mb)$ و $q(x,c) = \mathrm{tp}(c'/Mc)$. داریم $\phi(x,b) \in p$ و $\psi(x,c) \in q$. بنابراین $\phi(x,b) \wedge \psi(x,c)$ روی M نمی‌فرکد. ازاین‌رو $p \cup q$ روی M نمی‌فرکد. بنابراین یک $d \models p \cup q$ پیدا می‌شود که $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_M bc$.

اثبات ۹۷. یک b'' پیدا می‌شود که $\mathrm{tp}(b''b'/M) = \mathrm{tp}(cc'/M)$ و بلافاصله در نتیجه‌ی آن $b'' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{Mb'} cc'$. ازآنجاکه $b'' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_M b'$ (آن هم برای این که $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_M c'$). داریم $b'' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_M b'cc'$. و ازاین‌رو داریم $b'' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_M bb'cc'$. پس دنباله‌ی $bb'b''$ دنباله‌ای مستقل روی M است؛ و بویژه داریم $b' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_M bb''$. به‌همین‌ترتیب دنباله‌ی b'', b, c روی M مستقل است و بویژه $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_M b''c$ اکنون از آن‌جا که $\phi(b',b) \wedge \psi(b'',b') \models$، فرمولِ $\phi(x,b) \wedge \psi(b'',x)$ روی M نمی‌فُرکد.
حال با به‌کاربستن ۹۵ به روی A, b, b' و بدست آوردن M, b, b'', c به این نتیجه می‌رسیم که $\phi(x,b) \wedge \psi(c,x)$ روی C نمی‌فُرکد. □

قضیه‌ی ۹۸. فرض کنید T یک تئوریِ کامل باشد و $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\circ}_A B$ یک رابطه‌ی ناوردا میانِ چندتائی‌های متناهی و مجموعه‌های پارامتر باشد که ویژگی‌های زیر را داراست.

۱. یکنوایی و تعدی

۲. تقارن

۳. مشخّصه‌ی متناهی: داریم $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\circ}_A B$ اگروتنهااگر $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\circ}_A b$ برای هر چندتائی متناهیِ $b \in B$.

۴. مشخصه‌ی موضعی: $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\circ}_{B^\circ} B$ برای یک $|B^\circ| < \kappa$.

۵. وجود: یک $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\circ}_A B$ پیدا می‌شود که $\mathrm{tp}(a'/A) = \mathrm{tp}(a/A)$.

۶. قضیه‌ی استقلال روی مُدل‌ها.

آن‌گاه تئوریِ T ساده است و $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid} = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\circ}$.

یادآوریِ ۹۹. در تئوری‌های ساده، رابطه‌ی $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}$ همه‌ی ویژگی‌های گفته‌شده‌دربالا را دارد.

اثباتِ قضیه‌ی ۹۸. بی‌کاستن از کُلّیت، فرض کرده‌ایم که κ یک کاردینالِ منظم باشد. تعریفِ کاردینال منظم در بندِ پس از تعریفِ آمده‌است.

ادّعای ۱۰۰.

$$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\circ}_A b \Rightarrow a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{d}_A b.$$

فرض کنید $b = b_0 b_1 \dots$ روی A بازنشناختنی باشد. بگیرید $p(x,b) = \mathrm{tp}(a/Ab)$. می‌خواهیم نشان دهیم که $\bigcup_{i<\omega} p(x,b_i)$ سازگار است. ملاحظه‌ی ۱۴ را ببینید. بی کاستن از کلّیت فرض می‌کنیم که دنباله‌ی $b_0 b_1 \dots$ درازیِ $\kappa + 1$ دارد.

ادّعای ۱۰۱. یک مُدلِ $M \supseteq A$ داریم که $b_0 b_1 \ldots$ روی آن مستقل است.

آسان می‌توان دنباله‌ای چون $(M_i)_{i<\kappa}$ از مُدل‌ها را یافت که $j < i \Rightarrow b_j \in M_i$ و $b_i b_{i+1} \ldots$ روی M_i بازنشناختنی است. بنا به ویژگیِ مشخصه‌ی موضعی یک $B_0 \subseteq \bigcup M_i$ داریم که $|B_0| < \kappa$ و $b_k \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{B_0} \bigcup M_i$. ازآنجاکه κ منظّم است یک $i_0 < \kappa$ پیدا می‌شود که $B_0 \subseteq M_{i_0}$. پس بنا به ویژگیِ یکنوایی $b_k \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_{M_{i_0}} b_{i_0<k}$. ازآنجاکه $b_{i_0\le\kappa}$ روی M_{i_0} بازنشناختنی است، داریم $b_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_{M_{i_0}} b_{i_0<i}$ برای همه‌ی $i_0 < i \le k$. دنباله‌ی $b_{i_0} b_{i_0+1} \ldots$ و مُدلِ M_{i_0} ادعا را بدست می‌دهند.

ادّعای ۱۰۲. هر $\bigcup_{i\le n} p(x,b_i)$ دارای یک برآورنده‌ی d_n است که $d_n \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_M b_{\le n}$ (درنتیجه، $\bigcup_{i<\omega} p(x,b_i)$ سازگار است.)

فرض کنید که d_n را با خصوصیت گفته‌شده داشته باشیم. ازآن‌جاکه $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_M b$ یک d' پیدا می‌شود که $\models p(d', b_{n+1})$ و $d' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_M b_{n+1}$.
چرا می‌توان فرض کرد که $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_M b$؟
دلیل. بنا به ویژگیِ وجود، یک $a' \equiv_{Ab} a$ پیدا می‌شود که $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_{Ab} M$. ازآنجاکه $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_{Ab} Mb$ و $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_A b$، بنا به تعدّی، داریم $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_A Mb$ و اکنون بنا به یکنوایی داریم $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_M b$.
حال قضیه‌ی استقلال را بر

$$d_n, b_{\le n}, b_i, d'$$

اِعمال می‌کنیم و می‌رسیم به یک $d \models \bigcup_{i\le n+1} p(x,b_i)$ و یک $d' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_M b_{i\le n+1}$؛ و این اثبات ادّعای ۱۰۰ را بدست می‌دهد.

نتیجه‌ی ۱۰۳. T ساده است.

علّت. برای هر a, B یک $B_0 \subseteq B$ پیدا می‌شود که $|B_0| < \kappa$ و $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{d}_{B_0} B$.

ادّعای ۱۰۴.

$$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{d}_{A} b \Rightarrow a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_{A} b.$$

اثباتِ ۷۱ را به یاد آورید. قضیه‌ی ۷۱ همان است که می‌گفت که اگر T ساده باشد و $(b_i)_{i<\omega}$ دنباله‌ای مُرلی روی A باشد بگونه‌ای که $\bigcup_{i<\omega} \pi(x,b_i)$ سازگار است، آنگاه $\bigcup_{i<\omega} \pi(x,b_i)$ روی A بخش نمی‌کند. فرض کنید $b = b_0 b_1 \ldots$ یک دنباله با درازیِ λ باشد که روی A، $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}$ مستقل است؛ یعنی $b_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_A b_{<i}$، و این دنباله بگونه‌ای است که $\mathrm{tp}(b_i/A) = \mathrm{tp}(b/A)$. عناصرِ b_i را بنا به اصل وجود می‌توان پیدا کرد و بنا به لم شلاخ، می‌توان دنباله‌ی $b_0 b_1 \ldots$ را بازنشناختنی و بنا به یکنوایی می‌توان آن را مستقل روی A فرض کرد. هم‌چنین می‌توان این دنباله را با درازیِ κ گرفت (مشخصه‌ی موضعی). ازآن‌جاکه $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{d}_A b$ می‌توان فرض کرد که $b_{<k}$ روی Aa بازنشناختنی است. بنا به مشخصه‌ی موضعی و یکنوایی یک i پیدا می‌شود که $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_{b_{<i}} b_{<k}$. پس بنا به یکنوایی $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_{b_{<i}} b$. بنا به تقارن $b_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_{b_{<i}} a$. اکنون ازآن‌جاکه $b_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_A b_{<i}$ و بنا به تعدی، داریم $b_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_A a$؛ و نیز بنا به تقارن داریم $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_A b_i$. اکنون ازآن‌جاکه $b \equiv_{Aa} b_i$ داریم $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\circ}_A b$. □

اثباتِ لمِ شلاخ و لمِ اردوش‌رادو، کلاسِ تمرین

لمِ ۱۰۵ (لمِ شلاخ). برای هر مجموعه‌ی پارامترِ A یک کاردینالِ λ پیدا می‌شود که حکم پیش‌رو برایش برقرار باشد: هرگاه $(a_i)_{i\in I}$ یک دنباله باشد که مجموعه‌ی اندیسِ آن I، از اندازه‌ی λ باشد، آنگاه یک دنباله‌ی Aبازنشناختنیِ $(b_j)_{j<\omega}$ یافت می‌شود که

$$\forall j_1 < \ldots < j_n \in \omega \quad \exists i_1 < \ldots i_n \in I \quad b_{j_1}, \ldots, b_{j_n} \equiv_A a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}.$$

اثبات. بگیرید $\tau = \sup_{n<\omega} |S_n(A)|$. کافی است λ ای بیابیم که دو شرط زیر را برآورد.

۱. $cf(\lambda) > \tau$،

۲. برای هر $\kappa < \lambda$ و هر $n < \omega$ یک $\kappa' < \lambda$ پیدا شود که

$$\kappa' \to (\kappa)^n_\tau.$$

(۲. دنباله‌ای با درازیِ κ پیدا شود که همه‌ی nعضوهای پشت‌سرهم در آن هم‌تایپند، ۱. ازآن‌جاکه تعدادِ این دنباله‌ها از تعداد تایپ‌ها بسیار بیشتر است، بسیاری از آن‌ها با هم هم‌تایپند.)

بنا به لمِ اردوش‌رادو می‌گیریم $\lambda = \beth_{\tau^+}$. حال یک دنباله از تایپ‌های کاملِ $p_n(x_1, \ldots, x_n) \in S_n(A)$ را به شکل

$$p_1(x_1) \subseteq p_2(x_1, x_2) \subseteq \ldots$$

می‌سازیم که در آن هر p_n به‌گونه‌ای است که برای هر $\kappa < \lambda$ یک $I' \subseteq I$، $|I'| = \kappa$ پیدا شود که برای همه‌ی $i_1 < \ldots < i_n \in I'$ داشته‌باشیم $p_n = \mathrm{tp}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$. سپس $(b_i)_{i\in\omega}$ را برآورنده‌ای از $\bigcup_{i<\omega} p_i$ خواهیم گرفت.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \kappa < \lambda \quad \exists I' \subseteq I \quad |I'| = \kappa \quad \forall i_1 < \ldots < i_n \in I'$$
$$p_n = \mathrm{tp}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}/A).$$

فرض کنید p_{n-1} ساخته‌شده و یک $\kappa < \lambda$ داده‌شده‌است. کاردینالِ $\lambda > \kappa'$ و مجموعه‌ی $I' \subseteq I$ را به‌گونه‌ای برمی‌گزینیم که $\kappa' \to (\kappa)^n_\tau$ و $|I'| = \kappa'$ و برای هر $i_1 < \ldots < i_n \in I'$، $p_{n-1} = \mathrm{tp}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n-1}}/A)$. بنابراین $I'' \subseteq I'$ و p_n^κ چُنان یافت می‌شوند که برای همه‌ی $i_1 < \ldots < i_n \in I''$ داریم $p_n^\kappa = \mathrm{tp}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$. اکنون ازآن‌جاکه $cf(\lambda) > \tau$ یک p_n پیدا می‌شود که برای تعدادِ هم‌پایانی از κ ها، $p_n^\kappa = p_n$. □

تعریفِ ۱۰۶. فرض کنید $(X,<)$ یک مجموعه‌ی مرتبِ خطی باشد. زیرمجموعه‌ی $Y \subseteq X$ را هم‌پایان با X می‌خوانیم، هرگاه Y خوش‌ترتیب و دارای این ویژگی باشد که برای هر $x \in X$ یک $y \in Y$ هست که $x \leq y$.

برای هر ترتیبِ خطیِ X به‌آسانی می‌توان یک زیرمجموعه‌ی هم‌پایان با آن پیدا کرد. آن‌یک که کوچک‌ترین نوع‌ترتیبی را دارد عموماً مُرادِ ماست.

تعریفِ ۱۰۷. منظور از $cf(X)$، هم‌پایانِ X، کوچک‌ترین نوعِ‌ترتیبیِ زیرمجموعه‌های هم‌پایان با X است.

یک کاردینالِ نامتناهی κ را منظّم می‌خوانیم هرگاه $cf(\kappa) = \kappa$. بنابراین تعریف، ω و همه‌ی کاردینال‌های تالی، منظّمند. از اصولِ زِداِف‌سی نمی‌توان وجودِ کاردینال‌های حدّی منظّمِ ناشمارا را ثابت کرد. اگر اصل انتخاب را فرض کنیم، یک کاردینالِ κ منظّم است هرگاه حاصل‌جمعِ کاردینالیِ هیچ مجموعه‌ای با کاردینالیته‌ی کمتر از κ نباشد.

کادینالِ κ را رَمزی [۷] می‌خوانیم هرگاه

$$\kappa \to (\kappa)^{<\omega}_{۲}.$$

اگر κ رمزی باشد، هم‌چنین داریم

$$\kappa \to (\kappa)^{<\omega}_{\gamma}$$

برای همه‌ی $\gamma < \kappa$. یک کاردینالِ κ را فشرده‌ی‌ضعیف می‌خوانیم هرگاه

$$\kappa \to (\kappa)^{۲}_{۲}.$$

وجود چنین کاردینال‌هائی را نیز نمی‌توان از زِداف‌سی ثابت کرد.

قضیه‌ی ۱۰۸ (اردوش‌رادو).

$$\beth^{+}_{n}(\mu) \to (\mu^{+})^{n+۱}_{\mu}.$$

قضیه‌ی اردوش رادو با توجه به این‌که

$$\mu^{+} \to (\mu^{+})^{۱}_{n}$$

و با کمکِ لمِ زیر ثابت می‌شود.

لمِ ۱۰۹. اگر $\kappa^{+} \to (\mu^{+})^{n}_{\mu}$ آن‌گاه $(۲^{\kappa})^{+} \to (\mu^{+})^{n+۱}_{\mu}$.

اثبات. از فرض، برمی‌آید که $\mu \leq \kappa$. حال فرض کنید که B یک مجموعه از اندازه‌ی $(۲^{\kappa})^{+}$ باشد و $f : [B]^{n+۱} \to \mu$ یک رنگ‌آمیزیِ آن. هرگاه A زیرمجموعه‌ای از B باشد به هر تابعِ $p : [A]^{n} \to \mu$ یک تایپ روی A می‌گوییم. اگر $b \in B - A$ آن‌گاه تایپِ $\mathrm{tp}(b/A)$ تابعی است که زیرمجموعه‌های nعضویِ A را به $f(s \cup \{b\})$ می‌فرستد. اگر $|A| \leq \kappa$ آن‌گاه بیشینه، ۲^{κ} تایپ روی A داریم. بنابراین می‌توان ثابت

[۷] ربطی به واژه‌ی فارسیِ (و عربیِ) «رمز» ندارد. «رَمزی» اسم‌خاص است: Ramsey.

کرد که (شبیه اثبات ۶.۱.۲) که یک $B_\circ \subseteq B$ با اندازه ی 2^κ داریم که برای هر $A \subseteq B_\circ$ با اندازه‌ی بیشینه κ هر تایپ روی A که در B برآورده شده‌باشد، پیش‌تر در $B_\circ$ برآورده شده‌است.
یک $b \in B - B_\circ$ را برجا بگیرید. می‌توان دنباله‌ی $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa^+}$ را در $B_\circ$ چنان ساخت که در آن هر a_α تایپی یکسان با تایپِ b روی $\{a_\beta|\beta < \alpha\}$ داشته باشد. بنا به فرض، مجموعه‌ی $\{a_\alpha|\alpha < \kappa^+\}$ یک زیرمجموعه‌ی A از اندازه‌ی μ^+ دارد که $\mathrm{tp}(b/A)$ روی $[A]^n$ ثابت است. اکنون f روی $[A]^{n+1}$ ثابت است. □

جلسه‌ی هشتم

در جلسه‌ی پیش قضیه‌ی کیم و پیلِیْ را ثابت کردیم. عموماً ساده بودن یک تئوریِ داده‌شده را با کمکِ این قضیه بررسی می‌کنند.

مثالِ ۱۱۰. درگراف‌های تصادفی داریم

$$A \underset{B}{\downarrow} C \Leftrightarrow A \cap C \subseteq B.$$

مثالِ ۱۱۱. یک میدانِ سودومتناهی، مدلی نامتناهی از تئوریِ میدان‌های متناهی است. منظور از تئوریِ میدان‌های متناهی، اشتراک تئوری‌های همه‌ی میدان‌های متناهی است. معادلاً یک میدان، سودومتناهی است هرگاه به شکلِ

$$\prod_{q \text{توانی از عددِ اولِ} p} F_q/\mathcal{U}$$

باشد که در آن $\mathcal{U}$ فرافیلتر است. معادلاً، یک میدان، سودومتناهی است هرگاه مدلی باشد از همه گزاره‌هائی که در تقریباًهمه‌ی میدان‌های متناهی درستند. در میدان‌های سودومتناهی، داریم

$$A \underset{B}{\downarrow} C \Leftrightarrow A \overset{\text{جبری}}{\underset{B}{\downarrow}} C.$$

مثالِ ۱۱۲. تئوری $ACFA$، یا تئوری میدان‌های بسته‌ی جبری به‌همراه یک اتومرفیسم، همپای‌مدلیِ [8] تئوریِ همه‌ی میدان‌های دارای یک اُتومرفیسم است. در این تئوری

$$A \underset{B}{\downarrow} C \Leftrightarrow \sigma^{\mathbb{Z}}(A) \underset{\sigma^{\mathbb{Z}}(B)}{\downarrow} \sigma^{\mathbb{Z}}(C)$$

تئوری میدان‌های سودومتناهی و تئوریِ میدان‌های بسته‌ی جبریِ به‌همراه اتومرفیسم، هر دو کاملند. تئوریِ یک چنین میدانی چون K با در نظر گرفتن

$$(\text{میدانِ اولیه})^{alg} \cap K$$

تعیین می‌شود.

[8] Model-Companion

تئوری‌های ثابت

وارث و شریک‌ارث

تئوری‌های ثابت زیرمجموعه‌ای از تئوری‌های ساده‌اند. تئوری‌های ثابت حدود پانزده سال از تئوری‌های ساده پیرترند. علامتِ لنگر، $\smile\!\!\!\!\!\!|\;$ ، را نخستین بار شلاخ برای تئوری‌های ثابت تعریف کرده‌بود ولی این رابطه، بعدها در تئوری‌های ساده ویژگی‌های خوبی از خودش نشان داد که خودِ تئوری‌های ثابت آن ویژگی‌ها را نداشتند.
در این فصل، در پی پاسخ به این پرسشیم که گسترش‌های نافرکانِ تایپ‌ها در تئوری‌های ثابت چگونه‌اند.

تعریفِ ۱۱۳. فرض کنید M یک مُدل باشد، $M \subseteq B$، $p \in S(M)$، $q \in S(B)$ و $p \subseteq q$.

آ. q را یک وارثِ p می‌خوانیم هرگاه برای هر فرمولِ $\phi(x,y)$ $L(M)$، اگر $\phi(x,y) \in q$ آنگاه یک $m \in M$ یافت شود که $\phi(x,m) \in p$. به $L(M)$ توجه داشته‌باشید. در این تعریف اگر $\phi(x,b,n) \in q$ و $n \in M$ آن‌گاه یک $m \in M$ پیدا می‌شود که $\phi(x,m,n) \in p$.

ملاحظه‌ی ۱۱۴. در تئوری‌های ثابت، نیازی به توجه به $L(M)$ نخواهد بود و کافی است در تعریفِ بالا، ϕ فرمولی بی‌پارامتر فرض شود.

ب. q را شریک‌ارثِ p می‌خوانیم هرگاه q در M متناهیاًبرآوردنی باشد.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & B \arrow[d, dash] \\ p \arrow[r, dash] & q \end{tikzcd}$$

ملاحظه‌ی ۱۱۵. $\mathrm{tp}(a/Mb)$ وارثِ $\mathrm{tp}(a/M)$ است اگروتنهااگر $\mathrm{tp}(b/aM)$ شریک‌ارثِ $\mathrm{tp}(b/M)$ باشد.

اثبات. هر دوی این ویژگی‌های بدین معنیند که برای هر $L(M)$فرمولِ $\phi(x,y)$، هرگاه $\models \phi(a,b)$ آن‌گاه یک $m \in M$ هست که $\phi(a,m)$. $\square$

ملاحظه‌ی ۱۱۶. فرض کنید q وارثِ p باشد و $\phi(x,y), \delta(y) \in L(M)$ و $\phi(x,b) \in p$ و $\models \delta(b)$.
آن‌گاه یک $m \in M$ داریم که $\phi(x,m) \in p$ و $\models \delta(m)$.

اثبات. فرمولِ $\psi(x,b) = \phi(x,b) \wedge \delta(b)$ را در نظر بگیرید. $\square$

لمِ ۱۱۷ (گسترشِ وارث و شریک‌ارث). فرض کنید

$$M \subseteq B \subseteq C \quad p \in S(M) \quad q \in S(B) \quad p \subseteq q$$

اگر q $\frac{\text{وارث}}{\text{شریک‌ارثِ}}$ p باشد، آن‌گاه یک $q \subseteq r \in S(C)$ داریم که r نیز $\frac{\text{وارث}}{\text{شریک‌ارثِ}}$ p است.

اثبات. برای شریک‌ارث. نشان دهید که

$$q \cup \{\phi(x) \in L(C) | \text{این اجتماع در } M \text{متناهیاً برآوردنی باشد}\}$$

متناهیاًبرآوردنی است. منظور از مجموعه‌ی بالا مجموعه‌ی ماکزیمالی از $L(C)$فرمول‌ها است که شاملِ q باشد و در M متناهیاً برآوردنی باشد.

راه‌حل دیگر.

$$q((M)) := \{\phi(M) | \phi \in q\}$$

یک پایه‌ی‌فیلتر است. بنابراین یک فرافیلترِ $\mathcal{U} \supseteq q((M))$ داریم. هم‌چنین بگیرید

$$\mathcal{U}_C := \{\psi(x) | \psi \in L(C), \psi(M) \in \mathcal{U}\} \in S(C)$$

روشن است که $q \subseteq \mathcal{U}_C = r$.

اثبات برای ارث. دوگانگیِ (ارث $\leftrightarrow$ شریک‌ارث) را به‌همراه توصیفِ فرافیلتریِ شریک‌ارث به‌کارمی‌گیریم. برای نمونه فرض‌کنید

$$B = M \cup \{b_1, \ldots, b_m\} \quad C = B \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$$

فرض‌کنید $\mathcal{F}$ فیلتری روی M^m باشد و $\mathcal{G}$ فیلتری باشد روی M^{n+m} به‌گونه‌ای‌که اگر $G \in \mathcal{G}$ آن‌گاه $\pi(G) \in \mathcal{F}$. فرض‌کنیم که فرافیلترِ $\mathcal{U}$ بروی M^m گسترشی از فیلترِ $\mathcal{F}$ باشد. آن‌گاه یک $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}$ داریم که

$$U \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \in \mathcal{V}.$$

□

تعریفِ ۱۱۸. $p \in S(B)$ را تعریف‌شدنی روی C می‌خوانیم هرگاه برای هر فرمولِ $\phi(x, y)$ زیرمجموعه‌ی $\{b \in B | \phi(x, b) \in p\}$ نسبتاً Cتعریف‌شدنی باشد؛ یعنی یک Cفرمولِ $d_p x\phi(x, y)$ داشته‌باشیم که برای هر $b \in B$

$$\phi(x, b) \in p \Leftrightarrow d_p x\phi(x, b).$$

لمِ ۱۱۹. فرض‌کنید $p \in S(M)$ تعریف‌شدنی باشد و $M \subseteq B$. آن‌گاه p دقیقاً یک گسترشِ Mتعریف‌شدنیِ $q \in S(B)$ دارد. این q یکتا وارثِ p است.

اثبات. این‌که خانواده‌ی

$$\left(d_p x\phi(x, y)\right)_{\phi \text{ یک } M\text{فرمول}}$$

یک تایپ در $S(M)$ تعریف کند، یعنی این‌که M برخی جمله‌های خاص مرتبه‌ی اول را برمی‌آورد. مثلاً

$$\forall y \quad \left(d_p x\phi(x, y) \vee d_p x\neg\phi(x, y)\right)$$

$$\forall y \quad \left(d_p x\phi(x, y) \to \exists x d_p x\phi(x, y)\right)$$

$$\forall y(d_px\phi(x,y) \wedge d_px\psi(x,y)) \leftrightarrow d_px(\phi \wedge \psi)(x,y)$$

منظور، این است که این امر یک ویژگیِ مرتبه‌ی اولِ بیان‌شدنی در M است. پس روی $M \preceq \mathfrak{C}$ نیز $(d_px\phi)$ یک تایپ در $S(\mathfrak{C})$ تعریف می‌کند.

اثباتِ یکتائی. فرض کنید q تایپی باشد که با فرمول‌های $d_px\phi(x,y)$ تعریف شده‌است. فرض‌کنید q' تایپی باشد که با Mفرمول‌های $d_qx\phi(x,y)$ تعریف شده‌است. ازآن‌جا که هر دوی این تایپ‌ها p را می‌گسترانند، $d_px\phi(x,y)$ و $d_qx\phi(x,y)$ روی M بر هم منطبقند. پس روی $\mathfrak{C}$ نیز بر هم منطبقند؛ یعنی $q = q'$.

اثباتِ وارث بودن. فرض‌کنید $\phi(x,y) \in q$. اگر $\models d_px\phi(x,y)$ آنگاه ازآن‌جاکه $M \preceq \mathfrak{C}$،

$$\exists m \in M \quad \models d_px\phi(x,m)$$

یعنی $\phi(x,m) \in p$.

اثباتِ یکتاییِ وارث. فرض کنید $q' \neq q$ وارث دیگری باشد و

$$\phi(x,b) \notin q \quad \phi(x,b) \in q'.$$

داریم

$$\models \neg d_px\phi(x,b).$$

پس

$$\exists m \in M \quad \phi(x,m) \in p$$

و

$$\models \neg d_px\phi(x,m).$$

□

در ادامه برای فراهم آوردن مواد موردنیاز برای اثبات قضیه‌ی زیر، اندکی از بحث منحرف می‌شویم.

قضیه‌ی ۱۲۰. اگر T بسیارکمینه باشد، آنگاه هر تایپِ $p \in S(A)$ تعریف‌شدنی است.

انحراف

لمِ ۱۲۱. فرض‌کنید T یک تئوریِ کامل دل‌خواه باشد آنگاه

$$b \in \operatorname{acl}(aA) \Rightarrow \left[\mathrm{RM}(b/A) \leq \mathrm{RM}(a/A)\right].$$

ازاین‌رو

$$\operatorname{acl}(a) = \operatorname{acl}(a') \Rightarrow \left[\mathrm{RM}(a) = \mathrm{RM}(a')\right].$$

اثبات. اثباتی که در این‌جا ارائه کرده‌ایم با اثباتی که در کتاب آمده‌است متفاوت است. این اثبات را بر اساس منبع زیر و تمرین ۶۰۴۰۴ در کتاب تنت‌وزیگلر نوشته‌ایم:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler/preprints/morleyrang.pdf.

ثابت‌خواهیم‌کرد که

$$\mathrm{RM}(b/A) \leq \mathrm{RM}(ab/A) \leq \mathrm{RM}(a/A).$$

اثباتِ $\mathrm{RM}(b/A) \leq \mathrm{RM}(ab/A)$. فرض‌کنید که $\mathbb{E}$ یک کلاسِ Aتعریف‌شدنی باشد که $ab \in \mathbb{E}$. بگذارید $\pi : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ نگاشتِ تصویر بروی مؤلفه‌ی دوم باشد.

ادّعای ۱۲۲. $\mathrm{RM}(\mathbb{F}) \leq \mathrm{RM}(\mathbb{E})$. توجه کنید که این ادّعا برای هرتابعِ تصویری درست است و تنها مربوط به بحثِ حاضر نیست.

با استقراء روی α ثابت می‌کنیم، اگر $\mathrm{RM}(\mathbb{F}) \geq \alpha$ آن‌گاه $\mathrm{RM}(\mathbb{E}) \geq \alpha$. برای $\alpha = ۰$ حکم درست است، زیراکه π پوشا است. فرض‌کنید $\alpha = \beta + ۱$. اگر $\mathrm{RM}(F) \geq \alpha$ آن‌گاه کلاس‌های مجزای $F_۱, \ldots, F_n \subseteq F$ پیدا می‌شوند که $\mathrm{RM}(F_i) \geq \beta$. بنا به فرضِ استقراء داریم $\mathrm{RM}(\pi^{-۱}(F_i)) \geq \beta$ ازاین‌رو داریم $\mathrm{RM}(\mathbb{E})) \geq \alpha$.

اثباتِ این‌که $\mathrm{RM}(ab/A) \leq \mathrm{RM}(a/A)$. می‌خواهیم نشان دهیم که برای هر کلاسِ Aتعریف شدنیِ $\mathbb{F}$ که شاملِ a است یک کلاسِ $\mathbb{E}$ داریم که شاملِ ab است و $\mathrm{RM}(E) \leq \mathrm{RM}(F)$. فرض کنید $k = \mathrm{Mult}(b/Aa)$؛ یعنی تعدادِ گسترش‌های جهانیِ نافرکانِ تایپِ $\mathrm{tp}(b/Aa)$. فرض‌کنید $\mathbb{F}$، Aتعریف‌شدنی باشد. می‌دانیم که $a \in \mathbb{F}$ و می‌دانیم که b روی Aa جبری است. پس

$$\exists^{\leq k} y\phi(a, y).$$

بگیرید $\mathbb{E}(x, y) = \phi(x, y) \wedge \mathbb{F}(x)$. کلاسِ E Aتعریف‌شدنی است و $ab \in \mathbb{E}$ و $\pi : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ دارای این خاصیت است که همه‌ی تارهای $\pi^{-۱}(u)$ در آن بزرگیِ کمترمساویِ k دارند. ادّعا می‌کنیم که $\mathrm{RM}(\mathbb{E}) \leq \mathrm{RM}(\mathbb{F})$. به‌طورکُلّی ادّعا می‌کنیم که اگر $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ نگاشتی باشد که برای هر a، $f^{-۱}(a)$ متناهی است، آن‌گاه $\mathrm{RM}(E) \leq \mathrm{RM}(\mathbb{F})$

ادّعای ۱۲۳. فرض‌کنید $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ نگاشتی (تعریف‌شدنی) با تارهای متناهی باشد. آن‌گاه

$$\mathrm{RM}(\mathbb{E}) \leq \mathrm{RM}(\mathbb{F}).$$

این ادّعا را نیز از پیوندی که بدان اشاره شد آورده‌ام:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler/preprints/morleyrang.pdf

ادّعای بالا را به استقرا روی $\mathrm{RM}(\mathbb{F})$ ثابت می‌کنیم. هم‌چنین بی‌کاستن از کلیت فرض می‌کنیم که درجه‌ی مُرلیِ $\mathbb{F}$ برابرِ ۱ باشد. فرض کنید D_i یک خانواده از زیرمجموعه‌های تعریف‌شدنیِ مجزاازهم از $\mathbb{E}$ باشد. نشان

می‌دهیم که مرتبه‌ی مرلی هر $f(D_i)$ از مرتبه‌ی مُرلیِ $\mathbb{F}$ کمتر است و از این رو بنا به فرض استقراء، مرتبه‌ی مُرلیِ هر D_i از مرتبه‌ی مُرلیِ $\mathbb{F}$ کمتر است و ازاین‌رو مرتبه‌ی مُرلیِ $\mathbb{E}$ کمترمساویِ مرتبه‌ی مُرلیِ $\mathbb{F}$ خواهد بود. فرض‌کنید $e \in \mathbb{F}$ عنصری مولّد روی مجموعه‌ی پارامترهائی باشد که روی آن‌ها $f, \mathbb{E}, \mathbb{F}$ و D_i ها تعریف شده‌اند؛ یعنی $\mathrm{RM}(e) = \mathrm{RM}(\mathbb{F})$. این عنصرِ مولّد بنا به فرض این که درجه‌ی مُرلیِ $\mathbb{F}$ یک است، یکتا است. تقریباً همه‌ی D_i ها با $f^{-1}(e)$ اشتراکی ندارند. این $f(D_i)$ ها e را دربرندارند و ازاین‌رو مرتبه‌ی مُرلیِ کوچک‌تر از $\mathrm{RM}(\mathbb{F})$ دارند. پس بنا به فرض استقراء تقریباً همه‌ی D_i ها دارای مرتبه‌ی مُرلیِ کوچک‌تر از $\mathrm{RM}(\mathbb{F})$ هستند.

اثباتِ ادّعا و اثبات لم در این‌جا به پایان می‌رسد. □

جلسه‌ی نهم، بیست‌ویکم مه

در این جلسه من بجای آقای زیگلر درس داده‌ام، اما مواد درس را ایشان تعیین کرده‌است.

در جلسه‌ی پیش، تعریف‌شدنی بودن تایپ‌ها را تعریف کردیم

$$\phi(x, b) \in p \Leftrightarrow d_p x \phi(x, b).$$

و قرار شد نشان دهیم که در تئوری‌های بسیارکمینه، تایپ‌ها تعریف‌شدنیند. در یک بحثِ انحرافی نشان دادیم که

$$b \in \mathrm{acl}(aA) \Rightarrow \big[\mathrm{RM}(b/A) \leq \mathrm{RM}(a/A)\big].$$

و در نتیجه‌ی آن

$$\mathrm{acl}(a) = \mathrm{acl}(b) \Rightarrow \mathrm{RM}(a) = \mathrm{RM}(b).$$

امروز ادامه‌ی بحثِ انحرافی را پی‌می‌گیریم و قضیه‌ی مورد نظر را ثابت می‌کنیم. تئوریِ T در بحث امروز، دلخواه ولی کامل است.

لمِ ۱۲۴. اگر T بسیارکمینه باشد، داریم

$$\mathrm{RM}(a_1, \ldots, a_n/B) = \dim(a_1, \ldots, a_n/B).$$

اثبات. بنا به لمی که در بالا بدان اشاره شد، فرض می‌کنیم که $a_1, \ldots, a_n$ از هم مستقلند. نخست می‌خواهیم نشان دهیم که برای هر $\psi \in \mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_n/B)$ داریم $\mathrm{RM}(\psi) \geq n$. این یعنی $\mathrm{RM}(\mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_n)) \geq n$. پس از آن نشان خواهیم داد که $\mathrm{RM}(tp(a_1, \ldots, a_n))$ نمی‌تواند از n بیشتر باشد.

بنا به فرض استقراء داریم

$$\mathrm{RM}(a_1, \ldots, a_n/Ba_1) = n - 1.$$

یعنی $\mathrm{RM}(\chi) \geq n - ۱$ وقتی‌که χ فرمول نوشته‌شده در زیر است:

$$\chi := \big[(x_۱ = a_۱) \wedge \psi(x_۱, \ldots, x_n)\big].$$

همه‌ی مزودج‌های فرمولِ χ خانواده‌ی $\{\chi_a\}_a$ را می‌سازند که در آن هر کدام از χ_a ها به‌گونه‌ی زیر تعریف شده‌اند:

$$\chi_a := \big[(x_۱ = a) \wedge \psi(x_۱, \ldots, x_n)\big].$$

اعضای این خانواده ازهم‌مجزا و هر یک دارای مرتبه‌ی مِرلی بیشترمساوی $n - ۱$اند و اجتماعِ آن‌ها $\psi(\mathfrak{C})$ را می‌پوشاند؛ بنابراین $\mathrm{RM}(\psi) \geq n$.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که $\mathrm{RM}(\mathrm{tp}(a_۱, \ldots, a_n/B)) \geq n$. فرض کنید $B' \supseteq B$. نخست نکته‌ی زیر را به‌یادآرید.

یادآوریِ ۱۲۵. اگر T بسیارکمینه باشد و $M \models T$ و A و B دومجموعه باشند که هر یک مستقل‌است و $f : A \to B$ نگاشتی یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه f مقدّماتی است؛ یعنی

$$\forall a_۱, \ldots, a_n \in A \quad \mathrm{tp}(a_۱, \ldots, a_n) = \mathrm{tp}(f(a_۱), \ldots, f(a_n))$$

به‌ویژه اگر $a_۱, \ldots, a_n$ مستقل باشند و $b_۱, \ldots, b_n$ مستقل باشند آنگاه

$$\mathrm{tp}(a_۱, \ldots, a_n) = \mathrm{tp}(b_۱, \ldots, b_n).$$

برای این که ثابت کنیم که مرتبه‌ی مُرلی این تایپ از n افزون‌تر نمی‌شود کافی ثابت کنیم که مرتبه‌ی مُرلیِ $\mathfrak{C}^n$ از n افزون نمی‌شود. این را به استقرا روی n می‌توان ثابت کرد. (اثبات نیاز به توضیح بیشتر دارد. اثباتی که در کتاب زیگلر و تنت برای قضیه‌ی مشابه نوشته شده است، ناقص به نظر می‌آید. از طرفی اثباتی که در کتاب دیوید مارکر نوشته شده‌است به نظر جزئیات نالازم در خود دارد). □

نتیجه‌ی ۱۲۶. با فرض این‌که T بسیارکمینه باشد و ψ یک فرمول روی B، داریم

$$\mathrm{RM}(\psi) = \max\{\dim(\bar{a}/B) | \bar{a} \in \psi(\mathfrak{M})\}.$$

در نتیجه‌ی پیش‌رو خواهیم گفت که در تئوری‌های بسیارکمینه، مرتبه‌ی مُرلی تعریف‌شدنی است.

نتیجه‌ی ۱۲۷. فرض کنید T بسیارکمینه باشد. برای هر k، کلاسِ زیر تعریف‌شدنی است:

$$\{\bar{b} |\, \mathrm{RM}(\psi(x_۱, \ldots, x_n, \bar{b}) = k\}.$$

اثبات. کافی است حُکم را برای $k \geq$ ثابت کنیم. با استقراء روی n (تعداد متغیرها) نشان خواهیم داد که "$\mathrm{RM}(\psi(\bar{x}, \bar{b}) \geq k$" یک ویژگیِ مقدماتی از $\bar{b}$ است (توسط یک فرمولی که $\bar{b}$ آن را برمی‌آورد تعریف‌شدنی است). برای $n = ۱$ داریم

$$\mathrm{RM}(\psi(x_۱, \bar{b}) \geq ۱ \Leftrightarrow \exists_{\text{نامتناهی‌عدد}} x_۱ \quad \psi(x_۱, \bar{b}).$$

ازآن‌جاکه T بسیارکمینه است سمت راست عبارت بالا، یک ویژگیِ مقدّماتی از $\bar{b}$ است.

قدم استقرا. بنا به نتیجه‌ی بالا

$$\mathrm{RM}(\psi(\bar{x}, \bar{b})) \geq k \Leftrightarrow$$

$$\exists a_۱\, \mathrm{RM}(\psi(a_۱, x_۲, \ldots, x_n, \bar{b})) \geq k$$

یا

$$\exists a_۱ \not\in \mathrm{acl}(\bar{b}) \quad \mathrm{RM}(\psi(a_۱, x_۲, \ldots, x_n, \bar{b})) \geq k - ۱.$$

سطر دومِ رابطه‌ی بالا، بنا به فرض استقراء، یک ویژگیِ مقدماتی از $\bar{b}$ است (یعنی تعریف شدنی است). سطر چهارم نظر به دو نکته، تعریف‌شدنی است. نخست این که عبارتِ $\mathrm{RM}(\psi(a_۱, x_۲, \ldots, x_n, \bar{b})) \geq k - ۱$ بنا به فرض استقراء با یک فرمولِ $\theta(a_۱, \bar{b})$ تعریف‌شدنی است و دوم این‌که کُلِّ این عبارت معادل است با فرمولِ

$$\exists_{\text{بی‌نهایت‌عدد}} x_۱ \quad \theta(x_۱, b)$$

وعبارت بالا هم بنا به بسیارکمینه بودن، تعریف‌شدنی است. □

فرض کنید $p \in S(A)$ و $\mathrm{RM}(p) = \alpha$ و $\deg p = d$. آن‌گاه یک فرمولِ $\phi \in p$ داریم که $\mathrm{RM}(\phi) = \alpha$ و $\deg \phi = d$. هم‌چنین داریم

$$\forall \psi \quad \big[\psi \in p \Leftrightarrow \mathrm{RM}(\phi \wedge \neg\psi) < \alpha\big].$$

بنابراین

$$p = \{\psi | \psi \in L(A), \mathrm{RM}(\phi \wedge \psi) < \alpha\}.$$

حال آماده‌ی بیانِ قضیه‌ی موردنظر خودیم. این قضیه را تحت عنوان یک مثال برای تایپ‌های تعریف‌شدنی بیان می‌کنیم.

مثالِ ۱۲۸. اگر T بسیارکمینه باشد، آن‌گاه هر $p \in S(A)$ تعریف‌شدنی است.

اثبات. فرض کنید $\phi_\circ \in p$ به‌گونه‌ای باشد که $(\mathrm{RM}(\phi_\circ), \deg \phi_\circ) = (k, d)$ کمینه است. داریم

$$\psi(x, a) \in p \Leftrightarrow \mathrm{RM}(\phi_\circ(x) \wedge \neg\psi(x, a)) < k.$$

بنا به نتیجه‌ی ۱۲۷ فرمولِ بالا در $\mathrm{tp}(\bar{a})$ است. □

با یک یادآوری از جلسه‌ی گذشته، پیش‌می‌رویم:

یادآوریِ ۱۲۹. فرض‌کنید $p \in S(M)$ تعریف‌شدنی باشد و $M \subseteq B$. آنگاه p دارای دقیقاً یک گسترشِ Mتعریف‌شدنیِ $q \in S(B)$ است. این q یکتا وارثِ p است. همچنین

$$q = \{\phi(x, \bar{b} | \phi(x, \bar{y}) \in L, \bar{b} \in B, \mathfrak{C} \models d_p x \phi(x, \bar{b})\}.$$

گزاره‌ی ۱۳۰. فرض‌کنید T بسیارکمینه باشد و $M \models T$ و B دربرگیرنده‌ی M باشد. آنگاه

$\mathrm{tp}(a/B)$ وارث $\mathrm{tp}(a/M)$ است $\Leftrightarrow \mathrm{RM}(a/B) = \mathrm{RM}(a/M)$.

اثبات. فرض‌کنید $\mathrm{RM}(\mathrm{tp}(a/M)) = k$. فرض‌کنید $\phi \in \mathrm{tp}(a/M)$ چُنان باشد که $(\mathrm{RM}(\phi), \deg \phi) = (\mathrm{RM}(p), \deg p) = (k, d)$. بنا به یادآوری پیشین، تایپِ زیر تنها وارثِ p روی B است:

$$\{\psi(x) | \psi \in L(B), \mathrm{RM}(\phi \wedge \neg\psi(x, a)) < k\}$$

مجموعه‌ی بالا از فرمول‌ها در همه‌ی تایپ‌های $q \in S(B)$ که $p \subseteq q$ و $\mathrm{RM}(q) = k$ جای دارد. □

از پیش‌ترها می‌دانیم که اگر T بسیارکمینه باشد، آنگاه

$$\mathrm{RM}(a/B) = \mathrm{RM}(a/M) \Leftrightarrow a \underset{M}{\overset{\mathrm{acl}}{\downarrow}} B$$

ازآن‌جاکه مفهوم بالا تقارنی است، در تئوری‌های بسیارکمینه داریم (وارث=شریک‌ارث). همین، برای تئوری‌های ثابت نیز برقرار است و آن را در ادامه خواهیم دید.
همچنین ثابت کردیم که

$$p \in S(M) \quad M \subseteq B \quad M \models T \quad T\text{بسیارکمینه}$$
$$\Rightarrow$$
$$\exists_{\text{یکتا}} q \supseteq p \quad \mathrm{RM}(q) = \mathrm{RM}(p).$$

عبارت بالا برای تئوری‌های بسیارمتعالی نیز درست است.

جلسه‌ی دهم

فرض کنید $\phi(x,y)$ یک فرمول باشد که در آن x و y ممکن است طول‌های متفاوت داشته‌باشند. تعریف می‌کنیم $S_\phi(B)$ کلاسِ همه‌ی ϕتایپ‌ها روی B باشد. یعنی مجموعه‌ی ماکزیمالی برگرفته‌از فرمول‌های $\{(\neg)\phi(x,b)|b\in B\}$. بنابراین اگر $p\in S(B)$ یک تایپ کامل باشد آن گاه

$$p=\bigcup_{\phi\ \text{فرمول}} p\restriction_\phi$$

و در بالا $p\restriction_\phi\in S_\phi(B)$.

تعریفِ ۱۳۱. ۱. فرمولِ ϕ را ثابت می‌خوانیم هرگاه یک کاردینالِ نامتناهیِ λ داشته‌باشیم که

$$|B|=\lambda\Rightarrow|S_\phi(B)|\leq\lambda.$$

۲. تئوریِ T را ثابت می‌خوانیم هرگاه همه‌ی فرمول‌های $\phi(x,y)$ در آن ثابت باشند.

تمرین ۱۳۲. تئوریِ T ثابت است اگروتنهااگر λثابت برای یک کاردینالِ λ باشد؛ یعنی

$$|B|\leq\lambda\Rightarrow|S_{۱}(B)|\leq\lambda.$$

۳. فرمولِ ϕ دارای ویژگی ترتیبی است هرگاه دو دنباله‌ی نامتناهیِ $(a_i)_{i\in\omega}$ و $(b_j)_{i\in\omega}$ داشته‌باشیم که

$$\phi(a_i,b_j)\Leftrightarrow i<j.$$

۴. فرمولِ ϕ دارای ویژگیِ درختیِ دوتائی است هرگاه یک درختِ دوتائی از پارامترها مانند $(b_s)_{s\in ۲^{<\omega}}$ داشته باشیم که که در آن $b_\emptyset=\emptyset$ و برای هر $\sigma\in {}^{\omega}۲$ کلاس زیر سازگار است:

$$\{\phi^{\sigma(n)}(x,b_{\sigma\restriction_n})|n<\omega\}.$$

چیزی که می‌خواهیم این است که همه‌ی مسیرها در زیر سازگار باشند:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & b_\emptyset \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & \phi(x,b_{۰}) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \neg\phi(x,b_{۱}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\phi(x,b_{۰۰}) & & \neg\phi(x,b_{۰۱}) & & \phi(x,b_{۱۰}) & & \neg\phi(x,b_{۱۱})
\end{tikzcd}$$

ملاحظه‌ی ۱۳۳. منظور از $۲^{<\omega}$ مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های متناهی ساخته‌شده از صفر و یک است و منظور از از ۲^ω مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های به طولِ ω ساخته‌شده از صفر و یک است. وقتی می‌گوییم

$(b_s)_{s\in {}^{<\omega}2}$ یک درخت است یعنی عناصر آن به‌گونه‌ی زیر شکل یک درخت را داده‌اند:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & b_\emptyset \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & b_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & b_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
b_{00} & & b_{01} & & b_{10} & & b_{11}
\end{tikzcd}
$$

هر گِره در درخت بالا، یا یک دنباله‌ی متناهی از صفر و یک متناظر است. هر مسیر نامتناهی در این درخت، متناظر با یک دنباله‌ی شمارای نامتناهیِ از صفر و یک است. تعداد گره‌های این درخت شماراست. تعدادِ مسیرها ناشماراست. درخت بالا با دستور زیر کشیده‌شده‌است:

```
\[
\xymatrix{
&&& b_\emptyset \ar[dll]\ar[drr]\\
& b_0 \ar[dl]\ar[dr] &&&&b_1 \ar[dl]\ar[dr]\\
b_{00} && b_{01} &&b_{10} &&b_{11}
}
\]
```

ملاحظه‌ی ۱۳۴. اگر فرمولِ $\phi(x,y)$ دارای ویژگیِ ترتیبی باشد، فرمولِ $\phi(y,x)$ نیز دارای ویژگیِ ترتیبی است.

اثبات. فرض‌کنید دو دنباله‌ی (a_i) و (b_i) شاهد ویژگیِ ترتیبیِ $\phi(x,y)$ باشند:

$$
\begin{array}{ccc}
a_0 & a_1 & \dots \\
b_0 & b_1 & \dots
\end{array}
$$

با کمک لم استاندارد دنباله‌ی بازنشناختنیِ $\binom{a_i}{b_i}_{i\in I}$ برای ترتیبِ خطی دلخواهِ I پیدا می‌شود که در آن $\models \phi(a_i,b_j) \Leftrightarrow i<j$. در این دنباله برای $i<j$ سه ویژگی برقرار است:

$$\phi(a_i,b_j) \quad \neg\phi(a_j,b_i) \quad \neg\phi(a_i,b_i).$$

بگیرید $I = w^{-1} = \{z\in\mathbb{Z} | z\leq 0\}$. داریم $\phi(a_{-i},b_{-j}) \Leftrightarrow -i<-j$. می‌گیریم $a'_i=a_{-i}, b'_i=b_{-i}$. داریم $\phi(a'_i,b'_j) \Leftrightarrow j<i$. □

قضیه‌ی ۱۳۵. شماره‌های زیر برای هر فرمولِ $\phi(x,y)$ با هم معادلند.

آ. ϕ ثابت است.

ب. برای همه‌ی مجموعه‌پارامترهای نامتناهیِ B داریم $|S_\phi(B)| \leq |B|$.

ج. ϕ ویژگی ترتیبی ندارد.

د. ϕ ویژگی درختیِ دوتائی ندارد.

اثبات. نقشه‌ی اثبات: ب $\to$ ج $\to$ د $\to$ آ

د $\to$ آ. فرض کنید $(b_s)_{s\in ۲^{<\omega}}$ یک درخت دوتائی شاهد ویژگی درختی دوتائی برای ϕ باشد. بگیرید $B = \{b_s | s \in s \in^{<\omega} ۲\}$. هر مسیر در این درخت را می‌توان به یک تایپ در $S_\phi(B)$ گستراند. یعنی هر مجموعه‌ی $\{\phi^{\sigma(n)}(x, b_{\sigma\restriction n} | n<\omega\}$ را می‌توان به یک تایپِ p_σ در $S_\phi(B)$ گستراند. تایپ‌های p_δ دوبه‌دومجزایند، ازاین‌رو $|S_\phi(B)| = ۲^{\aleph_۰}$. بنابراین برای $\lambda = \aleph_۰$ شماره‌ی آ برقرار نیست.
حکم، هنوز ثابت نشده است؛ باید نشان دهیم که آ برای هیچ λ ای برقرار نیست. فرض کنید λ داده شده باشد. فرض کنید μ یک کاردینالِ نامتناهی باشد. بنا به فشردگی می‌توان یک درخت دوتائیِ $(b_s)_{s\in ۲^{<\mu}}$ یافت. اگر چنین درختی پیدا شود، با استدلالی مشابه با بندِ پیش خواهیم داشت

$$|B| \leq ۲^{<\mu} = \sup_{\kappa<\mu} ۲^\kappa \quad |S_\phi(B)| \geq ۲^\mu.$$

اگر μ را کوچکترین کاردینالی بگیریم که $۲^\mu > \lambda$ به آنچه که خواسته‌ایم خواهیم رسید. زیراکه با این انتخاب، برای هر $\kappa < \mu$ داریم $۲^\kappa \leq \lambda < ۲^\mu$. بنابراین

$$|B| \leq ۲^{<\mu} = \sup_{\kappa<\mu} ۲^\kappa \leq \lambda$$

و

$$|S_\phi(B)| \geq ۲^\mu > \lambda.$$

اثباتِ ج $\to$ د. فرض کنید دنباله‌ی $(a_i b_i)_{i\in I}$ شاهدی برای ویژگیِ ترتیبیِ ϕ باشد. هدفمان یافتن یک درخت است با گره‌های b_s با این ویژگی که هرگاه a_σ برآورنده‌ای از مسیری چون σ گذرنده از گره‌ی b در این درخت باشد (مانند آنچه در تصویر صفحه‌ی بعد می‌بینید) داشته‌باشیم

$$\neg\phi(a_\sigma, b_s) \quad \phi(a_{\sigma'}, b_s).$$

I را برابرِ $۲^{\leq\omega}$ بگیرید که با ترتیبی مرتب شده باشد که در آن

$$s۰ \subseteq \sigma \quad s۱ \subseteq \sigma' \Rightarrow \sigma < s < \sigma'$$

$$\begin{tikzcd}
a_\sigma \arrow[d] & & a_{\sigma'} \arrow[d] \\
s۰ & & s۱ \\
& s \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

درختِ I برای فرمولِ ϕ شاهد ویژگیِ درختی دوتائی است.
ب $\to$ ج. برای اثبات ج به ب نیازمند قضیه‌ی اردوش مَکِّیْ [۹] هستیم.

قضیه‌ی ۱۳۶. فرض کنید B یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد و $\mathcal{S} \subseteq P(B)$ و $|\mathcal{S}| > |B|$. آنگاه یکی از شماره‌های زیر رخ می‌دهد:

۱. دنباله‌های $(S_i)_{i\in\omega}$ و $(b_i)_{i\in\omega}$ که در آن $S_i \in \mathcal{S}$ و $b_i \in B$ چنان یافت می‌شوند که برای همه‌ی اندیس‌های i, j داریم

$$b_i \in S_j \Leftrightarrow j < i$$

۲. دنباله‌های $(S_i)_{i\in\omega}$ و $(b_i)_{i\in\omega}$ که در آن $S_i \in \mathcal{S}$ و $b_i \in B$ چنان یافت می‌شوند که برای همه‌ی اندیس‌های i, j داریم

$$b_i \in S_j \Leftrightarrow i < j.$$

سوالِ ۱۳۷. آیا هر دو حالت ذکر شده در قضیه‌ی بالا می‌توانند با هم رخ دهند؟

این قضیه در ادامه ثابت خواهیم کرد. فعلاً از آن برای اثباتِ ب $\to$ ج استفاده می‌کنیم.
فرض کنید $|S_\phi(B)| > |B|$. بگیرید $B' = B^n$ که در آن $n = |y|$. برای هر $p \in S_\phi(B)$ بگیرید $D_p = \{b \in B' | \phi(x, b) \in p\}$. بگیرید $\mathcal{S} = \{D_p | p \in S_\phi(B)\}$. داریم $|s_\phi(B)| = |\mathcal{S}| > |B'| = |B|$.
حال قضیه‌ی اردوش مَکِّیْ را بکارمی‌گیریم. دنباله‌های p_i و b_i چنان یافت می‌شوند که یا

$$b_j \in D_{p_i} \Leftrightarrow i < j$$

یا

$$b_j \in D_{p_i} \Leftrightarrow i > j.$$

فرض‌کنید $a_i \models p_i$. بنا به دو حالتِ بالا داریم یا

$$\phi(a_i, b_j) \Leftrightarrow i < j$$

که یعنی $\phi(x, y)$ ویژگی ترتیبی دارد یا

$$\phi(a_i, b_j) \Leftrightarrow j < i$$

که یعنی $\phi(y, x)$ ویژگی ترتیبی دارد. $\square$

حال قضیه‌ی اردوش مَکِّیْ را دوباره بیان می‌کنیم و به اثبات آن می‌پردازیم.

قضیه‌ی ۱۳۸. فرض کنید B مجموعه‌ای نامتناهی باشد و $\mathcal{S} \subseteq P(B)$ و $|\mathcal{S}| > |B|$. آنگاه یکی از شماره‌های زیر رخ می‌دهد:

[۹] Erdös-Makkai

۱. دنباله‌های $(S_i)_{i\in\omega}$ و $(b_i)_{i\in\omega}$ که در آن $S_i \in \mathcal{S}$ و $b_i \in B$ چنان یافت می‌شوند که برای همه‌ی اندیس‌های i,j داریم

$$b_i \in S_j \Leftrightarrow j < i$$

۲. دنباله‌های $(S_i)_{i\in\omega}$ و $(b_i)_{i\in\omega}$ که در آن $S_i \in \mathcal{S}$ و $b_i \in B$ چنان یافت می‌شوند که برای همه‌ی اندیس‌های i,j داریم

$$b_i \in S_j \Leftrightarrow i < j.$$

اثبات. زیرمجموعه‌ی $\mathcal{S}_\circ \subseteq \mathcal{S}$ را با اندازه‌ی $|\mathcal{S}_\circ| = |B|$ چُنان انتخاب کنید که $S_\circ$ دقیقاً همان زیرمجموعه‌های متناهی‌ای از B را از هم تفکیک کند که $\mathcal{S}$ می‌کند؛ یعنی

$$\forall s \in \mathcal{S} \quad \forall S,T \in p_\omega(B) \quad s \subseteq S \quad T \cap s = \emptyset$$
$$\exists s' \in S_\circ \quad s' \subseteq S \quad T \cap s' = \emptyset$$

فرض‌کنید $S^* \in \mathcal{S}$ عنصری باشد که نشود آن را با ترکیبِ‌بولی عناصری از $\mathcal{S}_\circ$ بدست آورد. سه دنباله‌ی $(S_i)_{i\in\omega}, (c_i)_{i\in\omega}, (d_i)_{i\in\omega}$ را که در آن $S_i \in \mathcal{S}_\circ$ به‌گونه‌ای می‌سازیم که $c_i \in S^*$، $d_i \notin S^*$. ساخت این دنباله‌ها با استقراء است. فرض‌کنید $S_\circ, \dots, S_{i-1}$ و $c_\circ, \dots, c_{i-1}$ و $d_\circ, \dots, d_{i-1}$ ساخته‌شده‌باشند. مجموعه‌ی $S_i \in \mathcal{S}_\circ$ را چنان انتخاب کنید که

$$c_j \in S_i \quad d_j \notin S_i \quad (j < i)$$

ازآن‌جاکه $\mathcal{S}^*$ ترکیبِ بولی $S_\circ, \dots, S_i$ نیست عناصر $c_i \in \mathcal{S}^*$ و $d_i \notin \mathcal{S}^*$ پیدا می‌شوند که

$$c_i \in S_j \Leftrightarrow d_i \in S_j \quad (j \leq i)$$

حال قضیه‌ی رمزی یک زیردنباله به ما می‌دهد که یا برای همه‌ی $j \leq i$ داریم $c_i, d_i \in S_j$ و یا برای همه‌ی $j \leq i$ داریم $c_i, d_i \notin S_j$ (برای $i = j$ مشکل داریم).
حالت اول $c_i, d_i \in S_j$. ازآن‌جاکه $d_j \notin S_i$ می‌گیریم $b_i = d_i$ و حالت اول حکم قضیه بدست می‌آید.
حالت دوم. $c_i, d_i \notin S_j$. ازآن‌جاکه $c_j \in S_i$ می‌گیریم $b_i = c_i$ و در این صورت به حالت دوم حکم قضیه می‌رسیم.
توجه کنید که در این اثبات از مشکل $i = j$ با سهل‌انگاری گذشته‌ایم. سعی کنید این مشکل را برطرف کنید. $\square$

جلسه‌ی یازدهم

قضیه‌ی ۱۳۹. T ثابت است اگروتنهااگر همه‌ی تایپ‌ها در آن تعریف‌شدنی باشند.

ملاحظه‌ی ۱۴۰. به قضیه‌ی ۱۳۹ می‌توان این را افزود که هر تایپ روی F با پارامتر در F تعریف‌شدنی است. این امر از قضیه نتیجه نمی‌شود ولی مشابهِ آن ثابت می‌شود.

اثباتِ قضیه‌ی ۱۳۹. $\Rightarrow$ داریم

$$\begin{aligned} &|S(A)| \leq \\ &\leq \text{بیشینه‌ی ممکن تعدادتعریف‌های } (d_p x\phi)_{L \text{ فرمولی در } \phi(x,y)} \\ &= \max(|T|, |A|)^{|T|} \quad \text{تعداد } L \text{فرمول ها} (\text{ تعداد } L(A) \text{فرمول‌ها}) \end{aligned}$$

اگر $\lambda^{|T|} = \lambda$ مثلاً اگر $\lambda = \kappa^{|T|}$ آن‌گاه داریم

$$|A| \leq \lambda \Rightarrow |S(A)| \leq \lambda$$

یعنی T یک تئوریِ λثابت است و از این رو T یک تئوریِ ثابت است.
$\Leftrightarrow$.

یادآوریِ ۱۴۱. فرض‌کنید T یک تئوری بسیارمتعالی باشد و $p \in S(A)$. فرض‌کنید فرمول $\phi \in p$ با کمینه‌ی مرتبه‌ی مُرلی و درجه‌ی مُرلی باشد. برای هر فرمولِ ψ داریم

$$\psi \in p \Leftrightarrow \mathrm{RM}(\phi \wedge \neg\psi) < \alpha.$$

آیا عبارت بالا با پارامترهای ϕ تعریف شده است؟

حال فرض کنید $\phi(x,y)$ یک فرمول باشد. می‌خواهیم مرتبه‌ی دیگری برای آن تعریف کنیم. تعریف کنید $R_\phi(\theta(x))$ بزرگ‌ترین nای باشد که برای آن یک درختِ $(b_s)_{s \in 2^{\leq n}}$ داشته باشیم که برای هر $\sigma \in 2^n$ مجموعه‌ی زیر از فرمول‌ها سازگار باشد

$$\theta(x) \cup \{\phi^{\sigma(i)}(x, b \restriction i | i < n\}.$$

در تعریف بالا داریم

$$\begin{aligned} &R \geq 0 : \ \theta \text{ سازگار} \\ &R \geq 1 : \ \theta \wedge \phi(x, b_\emptyset) \text{ و } \theta \wedge \phi(x, b_{00}) \text{ برآورده‌شدنیند} \\ &\begin{cases} R(\theta \wedge \phi(x,b)) \geq n \\ R(\theta \wedge \neg\phi(x,b)) \geq n \end{cases} \Rightarrow R(\theta) \geq n+1. \end{aligned}$$

فرض‌کنید $p \in S_\phi(A)$. فرض‌کنید θ عطفی از فرمول‌های p باشد و $R(\theta) = n$ کمینه باشد. داریم

$$\phi(x,b) \in p \Leftrightarrow \underbrace{R(\theta \wedge \neg\phi(x,b)) < n}_{\text{ویژگی‌ای تعریف‌شدنی}}$$

$\square$

میان درختِ ویژگی تعالی بسیار و درخت ویژگی درختی دوتائی اشتباه نکنید. برای درختِ ویژگیِ تعالی بسیار نمی‌شود مانند بالا، درجه تعریف کرد. این درخت برای عدد متناهی n می‌تواند به ارتفاعِ n برسد. فرمولبندی بهتری برای قضیه‌ی بالا: ϕ ثابت است اکروتنهااگر همه‌ی ϕتایپ‌ها تعریف‌شدنی باشند.

قضیه‌ی ۱۴۲ (پوازا، جداسازی متغیرها). فرض‌کنید T ثابت باشد و $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$ کلاسی Aتعریف‌شدنی باشد. آن‌گاه همه‌ی زیرکلاس‌های تعریف‌شدنی از $\mathbb{F}^n$ با پارامترهائی در $\mathbb{F} \cup A$ تعریف می‌شوند.

ملاحظه‌ی ۱۴۳. به هر کلاسِ $\emptyset$تعریف‌شدنیِ $\mathbb{F}$ با ویژگیِ بالا، یک کلاسِ ثابت‌نشانده می‌گویند.

مثالِ ۱۴۴ (مثال از مجموعه‌ای که ثابت‌نشانده نیست). بگیرید $T = \mathrm{Th}(Q, <, P)$ که در آن P یک محمول یکی‌ای برای یک زیرمجموعه‌ی چگال و مُکَمِّلْ‌چگال است. یعنی

$$\forall a, b \quad \exists x \in P \quad \exists y \in P^c \quad x \in (a, b) \wedge y \notin (a, b)$$

تئوری نامُبُرده اصل‌بندی کامل دارد و بنابراین $T = \mathrm{Th}(\mathbb{R}, <, Q)$. فرض‌کنید $a \in \mathbb{Q} - P$. مجموعه‌ی زیر را با پارامترهای در P نمی‌توان تعریف کرد:

$$\{x \in P | x < a\}.$$

اثباتِ قضیه. فرض‌کنید فرمولِ $\phi(x_1, \ldots, x_n, a)$ کلاسِ $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{F}^n$ را تعریف کند. بگیرید $p(y) = \mathrm{tp}(a/\mathbb{F})$. داریم

$$\bar{b} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \phi(\bar{b}, \bar{a}) \Leftrightarrow \phi(\bar{b}, x) \in p \Leftrightarrow \underbrace{d_p x \phi(x, \bar{b})}_{\text{پارامتر در } \mathbb{F}}$$

پس

$$\mathbb{R} = \{\underbrace{y \in \mathbb{F}}_{\text{روی} A} | \models \underbrace{d_p x \phi(y, x)}_{\text{روی} \mathbb{F}}\}.$$

□

ملاحظه‌ی ۱۴۵. در این قضیه به $\mathbb{F} \cup A$ توجه کنید. خودِ $\mathbb{F}$ به‌تنهائی بسنده نیست. برای مثال اگر $A = \{a\}$ و $\mathbb{R} = \mathbb{F} = \mathfrak{C} - \{a\}$. آن‌گاه $\mathfrak{C} - \{a\}$ با پارامترهای در $\mathfrak{C} - \{a\}$ تعریف‌شدنی نیست.

ملاحظه‌ی ۱۴۶ (بیان دیگر). اگر T ثابت باشد، هر کلاسِ تعریف‌شدنیِ $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}^n$ با پارامترهای در $\mathbb{R}$ تعریف‌شدنی است.

ملاحظه‌ی ۱۴۷. اگر $\mathbb{F}$ ثابت‌ْنشانده باشد می‌توان ساختارِ ایجادشده روی آن را به گونه‌ی زیر تعریف کرد که آن هم در این جا ثابت است: (تعریفِ ساختار ایجاد شده ربطی به ثابت‌نشاندگی ندارد ولی برای هر مجموعه‌ی تعریف‌شدنی می‌توان ساختار ایجاد شده تعریف کرد)

$$\mathcal{C}^* = (\mathbb{F}, \phi(\mathbb{F}), \ldots)_{\phi \in L}$$

که در بالا همه‌ی فرمول‌های بی‌پارامترِ $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ را محمول گرفته‌ایم.

لمِ زیر با همه‌ی مرموز بودنش اثبات آسانی دارد! لمِ عمیقی است و درک معنی واقعی آن آسان نیست!

لمِ ۱۴۸. فرض‌کنید T ثابت باشد و $p(x)$ و $q(x)$ دو تایپِ جهانی باشند. آن‌گاه برای هر فرمولِ دارای پارامترِ $\phi(x,y)$ داریم

$$d_p x\phi(x,y) \in q(y) \Leftrightarrow d_q y\phi(x,y) \in p(x).$$

سمتِ چپِ عبارت بالا می‌گوید که اگر $b \models q$ (!) آن‌گاه $\phi(x,b) \in q$. البته که عبارتِ $b \models q$ معنی ندارد چون q یک تایپ جهانی است. لمِ بالا به‌نوعی می‌گوید که اگر $\operatorname{tp}(a/b)$ گسترش تعریف‌شدنیِ p باشد آن‌گاه $\operatorname{tp}(b/a)$ گسترش تعریف‌شدنیِ q است. این معادل عبارت زیر است:

$$a \mathop{\downarrow}_{c} b \Rightarrow b \mathop{\downarrow}_{c} a.$$

اثبات. فرض کنید p, q, ϕ روی A تعریف‌شدنی باشند. دنباله‌ی

$$a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots$$

را به‌گونه‌ای می‌سازیم که

$$a_i \models q \restriction Ab_0 \ldots b_{i-1}$$

$$b_i \models p \restriction Aa_0 \ldots a_i$$

برای $j < i$ داریم

$$\models \phi(a_i, b_j) \Leftrightarrow \phi(x, b_j) \in q \restriction Aa_0, \ldots a_i \Leftrightarrow \underbrace{d_p x\phi(x, b_j)}_{\text{پارامتر در } A} \Leftrightarrow [d_p x\phi(x,y) \in q(y)]$$

برای $i \leq j$ داریم

$$\models \phi(a_i, b_j) \Leftrightarrow d_q y\phi(a_i, y) \Leftrightarrow [d_q y\phi(x,y) \in p(y)]$$

اگر مثلاً داشته باشیم

$$d_p x\phi(x,y) \in q(y) \quad d_q y\phi(x,y) \notin p(y)$$

آن‌گاه

$$i < j \Rightarrow \models \phi(a_i, b_j)$$

$$j \geq i \Rightarrow \neg\phi(a_i, b_j)$$

یعنی فرمولِ ϕ دارای ویژگیِ ترتیبی است و این ناممکن است. $\square$

هدفمان نشان دادنِ این است که در تئوری‌های ثابت، هرگاه

$$p \in S(M) \quad M \subseteq A \quad p \subseteq q \in S(A)$$

شماره‌های زیر با هم معادلند:

۱. q روی M نمی‌فرکد.

۲. q روی M تعریف‌شدنی است.

۳. q شریک‌ارثِ p است.

۴. q وارثِ p است.

لمِ ۱۴۹. فرض‌کنید $\mathbb{P} \in S(\mathfrak{C})$.

۱. اگر $\mathbb{P}$ روی B تعریف‌شدنی باشد، روی B نمی‌فرکد.

۲. اگر T ثابت باشد آن‌گاه اگر $\mathbb{P}$ روی M بخش‌نشود آن‌گاه $\mathbb{P}$ روی M تعریف می‌شود.

اثبات. ۱. از شرط برمی‌آید که $\mathbb{P}$ تایپی Bناوردا است. پس روی B نمی‌فرکد. زیراکه اگر $b_0 b_1 \dots$ یک دنباله‌ی بازنشناختنی باشد و $\phi(x, b_0) \in \mathbb{P}$ بنا به ناوردا بودن تحت اتومرفیسم‌های نگه‌دارنده‌ی B و بنا به این که هر یک از b_i ها با اتومرفیسمی به دیگری فرستاده می‌شود، نتیجه‌می‌گیریم که $\phi(x, b_i) \in \mathbb{P}$.
۲. برای اثباتِ این حکم، کافی است ثابت کنیم که $\mathbb{P}$ وارثِ $p = \mathbb{P} \upharpoonright M$ است؛ با این توجیه که p تایپی Mتعریف‌شدنی است و تنها دارای یک گسترشِ جهانی است که آن، هم تعریف‌شدنی است و هم وارثِ p است. فرض‌کنید $\phi(x, b) \in \mathbb{P}$. می‌خواهیم نشان دهیم که عنصری مانند $m \in M$ پیدا می‌شود که $\phi(x, m) \in p$. فرض‌کنید $\mathbb{Q}$ شریکِ ارثی برای $\text{tp}(b/M)$ باشد. دنباله‌ی $b = b_0 b_1 \dots$ را چنان انتخاب کنید که

$$b_i \models \mathbb{Q} \upharpoonright b_0 \dots b_{i-1}.$$

ازآن‌جاکه $\mathbb{Q}$ تایپی Mناوردا است دنباله‌ی $b = b_0 b_1 \dots$ روی M بازنشناختنی است. فرض کنید a چنان باشد که $\models \phi(a, b)$. ازان‌جاکه $\mathbb{P} \upharpoonright_{Mb}$ روی M بخش نمی‌شود، می‌توان فرض کرد که $b_0 b_1 \dots$ روی Ma بازنشناختنی است (کافی است $b_0 b_1, \dots$ را روی Mb با کمک اتومرفیسم‌ها بچرخانیم. یادآوری زیر را ببینید).

یادآوریِ ۱۵۰. $\text{tp}(a/Mb)$ روی M بخش نمی‌شود هرگاه برای هر دنباله‌ی روی M بازنشناختنیِ $b = b_0 b_1, \dots$ یک دنباله‌ی روی Ma بازنشناختنیِ $b = b'_0 b'_1 \dots$ پیدا شود که

$$\bar{b}' \equiv_{Mb} \bar{b}.$$

تایپِ $p' = \text{tp}(a/M b_0 b_1 \dots)$ روی $M b_0 \dots b_{n-1}$ تعریف‌شدنی است (برای یک n مناسب). ازآن‌جاکه $\models \phi(a, b_n)$ (آن‌هم برای اینکه (b_i) روی a بازنشناختنی است) داریم $\models d_{p'} x \phi(x, b_n)$. ازسوی‌دیگر $\text{tp}(b_n / M b_0 \dots b_{n-1}) = \mathbb{Q} \upharpoonright M b_0 \dots b_{n-1}$ شریک‌ارثی برای $\text{tp}(b/M)$ است؛ یعنی در M متناهیاًبرآورده می‌شود. پس عنصری مانند $m \in M$ پیدا می‌شود که $\models d_{p'} x \phi(x, m)$ یعنی $\phi(x, m) \in p'$ و از این رو $\phi(x, m) \in p$. $\square$

نتیجه‌ی ۱۵۱. تئوری‌های ثابت، ساده‌اند.

ملاحظه‌ی ۱۵۲. فرض‌کنید $\mathbb{C}$ به‌اندازه‌اشباع باشد (ωاشباع). آن‌گاه $\mathbb{P}$ روی B بخش نمی‌شود اگروتنهااگر روی آن نفرکد.

اثبات. اگر p بفرکد، فرمولی در آن مانند $\phi(x,c)$ پیدامی‌شود که

$$\phi(x,c) \rightarrow \bigvee \underbrace{\psi_i(x,c_i)}_{\text{بخش می‌شود}}$$

از این که $\phi(x,c) \in p$ نتیجه می‌شود که یکی از ψ_i ها نیز در p است. $\square$

اثباتِ نتیجه. فرض‌کنید $p \in S(M)$. فرض‌کنید $\mathbb{P}$ یکتا وارثِ p و p روی $B \subseteq M$ تعریف شده باشد که $|B| \leq |M|$. آن‌گاه $\mathbb{P}$ نیز روی B تعریف‌شدنی است و ازاین‌رو روی B بخش نمی‌شود. پس p نیز روی B بخش نمی‌شود. $\square$

نتیجه‌ی ۱۵۳. فرض‌کنید T ثابت باشد، $p \in S(M)$ و $A \subseteq M$. انگاه p دارای دقیقاً یک گسترشُ $q \in S(A)$ با ویژگی‌های معادلِ زیر است:

۱. q روی M نمی‌فرکد.

۲. q روی M تعریف‌شدنی است.

۳. q وارثِ p است.

۴. q شریک‌ارثِ p است.

اثبات. ازآن‌جاکه p تعریف‌شدنی است، ۲ و ۳ با هم معادلند. معادل بودن آنها با ۱ از قضیه‌ی ۱۹۸ به‌گونه‌ی زیر نتیجه می‌شود:
فرض‌کنید q روی M تعریف‌شدنی باشد. در این صورت q دارای یک گسترش جهانیِ $\mathbb{P}$ است که تعریف‌شدنی است. قضیه‌ی ۱۹۸ می‌گوید که اگر $\mathbb{P}$ روی M نفرکد، q هم روی M نمی‌فرکد. اگر q روی M نفرکد، گسترشی جهانی مانند $\mathbb{P}$ دارد که روی M نمی‌فرکد. بنا به ۱۴۹ p روی M تعریف‌شدنی است.
برای اثبات معادل‌بودن ۱ و ۴. بگیرید $q = \mathrm{tp}(b/MA)$.
q شریک‌ارثِ $\mathrm{tp}(b/M)$ است اگروتنهااگر $\mathrm{tp}(A/Mb)$ وارثِ $\mathrm{tp}(A/M)$ باشد اگروتنها اگر (بنا به ۳ $\Leftrightarrow$ ۱) $b \downarrow_M A$ اگروتنهااگر (بنا بر تقارن در تئوری‌های ساده) $A \downarrow_M b$. $\square$

حذف موهومات و T^{eq}

یادآوریِ ۱۵۴. فرض کنید T یک تئوریِ دلخواه و $\mathbb{D}$ یک کلاس تعریف شدنی باشد. این کلاس، Aتعریف‌شدنی است اگروتنهااگر Aناوردا باشد.

تعریفِ ۱۵۵. می‌گوئیم $\bar{d}$ پارامترِ کانونیِ $\mathbb{D}$ است هرگاه برای هر $\alpha \in Aut(\mathfrak{C})$

$$\alpha(\bar{d}) = \bar{d} \Leftrightarrow \alpha(\mathbb{D}) = \mathbb{D}.$$

ملاحظه‌ی ۱۵۶. تحتِ dcl عنصرِ $\bar{d}$ یکتا است. همچنین $\mathbb{D}$، $\bar{d}$ تعریف شدنی است و می‌نویسیم $\bar{d} = [\mathbb{D}]$.
حالت خاص: $\bar{d} \in \mathrm{dcl}(A)$ اگروتنهااگر برای هر α که A را نقطه‌نقطه حفظ کند داشته‌باشیم $\alpha(\bar{d}) = \bar{d}$.

مثالِ ۱۵۷ (مثال نقض). ۱. فرض کنید T تئوری رابطه‌ی هم‌ارزیِ با دو کلاس نامتناهی باشد. این کلاس‌ها هیچ پارامتر کانونی‌ای ندارند. تصویر:

۲. $\mathbb{D} = \{a, b\}$ در تئوریِ تهی. اگر $a \neq b$ این مجموعه دارای پارامتر کانونی نیست. توجه کنید که اگر T تئوری میدان‌های بسیته‌ی جبری با مشخصه‌ی p باشد، مجموعه‌ی $\{a, b\}$ دارای پارامتر کانونی است و

$$[\{a, b\}] = (a + b, a.b). \quad (X - a)(X - b) = X^{۲} - (a + b)X + ab.$$

تعریفِ ۱۵۸. فرض کنید $\mathbb{P} \in S(\mathfrak{C})$ تعریف شدنی باشد. می‌گوئیم B پایه‌ی کانونیِ $\mathbb{P}$ است هرگاه

$$\underbrace{\alpha(B) = B}_{\text{نقطه‌وار}} \Leftrightarrow \alpha(\mathbb{P}) = \mathbb{P}.$$

می‌نویسیم $B = \mathrm{cb}(\mathbb{P})$ و پایه‌ی کانونی نیز به‌پیمانه‌ی dcl یکتا است.

ملاحظه‌ی ۱۵۹. فرض کنید

$$B = \{[d_{\mathbb{P}}\phi(x, \mathfrak{C})] | \text{فرمول } \phi(x, y)\}$$

آن‌گاه داریم

$$\alpha(d_{\mathbb{P}}x\phi(x, \mathfrak{C})) = d_{\mathbb{P}}x\phi(x, \mathfrak{C}) \Leftrightarrow \alpha(\mathbb{P} \restriction \phi) = \mathbb{P} \restriction \phi.$$

تعریفِ ۱۶۰. می‌گوئیم T موهومات را حذف می‌کند هرگاه هر کلاسِ هم‌ارزی در هر رابطه‌ی هم‌ارزیِ $\emptyset$تعریف‌شدنیِ $\mathbb{E}$ روی $\mathfrak{C}^n$ دارای پارامتر کانونی باشد. می‌گوئیم $a/\mathbb{E}$ عنصری موهومی است.

قضیه‌ی ۱۶۱. اگر T موهومات را حذف کند آن‌گاه

۱. هر کلاسِ تعریف‌شدنی، دارای پارامتر کانونی است.

۲. هر تایپِ جهانیِ تعریف شدنی دارای پایه‌ی کانونی است.

اثبات. اثباتِ ۱. فرض‌کنید $\mathbb{D} = \phi(\mathfrak{C}, \bar{a})$ تعریف کنید

$$\bar{a}\mathbb{E}\bar{a}' \Leftrightarrow \phi(\mathfrak{C}, \bar{a}) = \phi(\mathfrak{C}, \bar{a}')$$

انگاه

$$\alpha(\mathbb{D}) = \mathbb{D} \Leftrightarrow \bar{a}\mathbb{E}\bar{a}' \Leftrightarrow \alpha[\bar{a}/\mathbb{E}] = [\bar{a}/\mathbb{E}]$$

پس $[\mathbb{D}] = [\bar{a}/\mathbb{E}]$.
اثباتِ ۲. داریم

$$\mathrm{cb}(\mathbb{P}) = \{[d_{\mathbb{P}}x\phi(x, \mathfrak{C}])|\phi(x, y) \in L\}.$$

□

جلسه‌ی دوازدهم

پرسشِ ۱۶۲ (خودم). لطفاً مثالی از تئوری‌های بدون مدل اول بزنید.

پاسخ. چنین تئوری‌ای نمی‌تواند بسیار متعالی باشد. بنابراین مثال زیر برایش مناسب است. بگیرید

$$L = \{p_s | s \in ۲^{<\omega}\}$$
$$T := p_s \neq \emptyset \quad p_\emptyset = \text{همه‌چیز} \quad p_{s۰} \underset{\text{بدون اشتراک}}{\bigcup} p_{s۱} = p_s$$

تئوری بالا کامل (و بسیارثابت) و ساده است و هیچ مدلِ اولی ندارد (مدلی که مقدماتی در همه‌ی مدل‌های دیگر بنشیند) مدل‌های این تئوری را تابع‌های زیر به دست می‌دهند:

$$f : ۲^\omega \to card \quad f(\sigma) = \#\{x | \bigwedge_{s \subseteq \sigma} p_s(x)\}$$

که در آن $\{\sigma | f(\sigma) \neq ۰\}$ چگال است. این تئوری هیچ مدلِ $\aleph_۰$اشباعی ندارد. □

مثالِ ۱۶۳ (مثال برای قضیه‌ی اردوش مَکِّی).

$$B = s^{<\omega}$$
$$\mathcal{S} = \{s_\sigma | \sigma \in s^\omega\}$$
$$\mathcal{S}_\sigma = \{s | s \subseteq \sigma\}$$

می‌توانیم b_i و S_j هائی چنان بیابیم که

$$b_i \in S_j \Leftrightarrow i < j.$$

ولی نمی‌توان b_i و S_j هائی یافت که

$$b_i \in S_j \Leftrightarrow i > j.$$

شکل کشیده شود.

یادآوریِ ۱۶۴. فرض‌کنید که $\mathbb{D}$ یک کلاسِ تعریف‌شدنی باشد. این کلاس را می‌توان روی A تعریف کرد اگروتنها اگر

$$\forall \alpha \in Aut(\mathfrak{C}/A) \quad \alpha(\mathbb{D}) = \mathbb{D}.$$

لمِ ۱۶۵. فرض‌کنید که T موهومات را حذف کند و $\mathbb{D}$ کلاسی تعریف‌شدنی باشد. شماره‌های زیر با هم معادلند.

۱. کلاسِ $\mathbb{D}$ روی $\mathrm{acl}(A)$ تعریف می‌شود.

۲. مجموعه‌ی زیر متناهی است:

$$\{\alpha(\mathbb{D}) | \alpha \in Aut(\mathfrak{C}/A)\}.$$

۳. $\mathbb{D} = \mathbb{F}_۱ \cup \ldots \cup \mathbb{F}_n$ که در آن $\mathbb{F}_i$ ها کلاس‌هائی از یک رابطه‌ی هم‌ارزیِ Aتعریف‌شدنیند که این رابطه‌ی هم‌ارزی، متناهی‌عدد کلاس دارد.

اثبات. معنی عبارتِ ۱ این است که $[\mathbb{D}] \in \mathrm{dcl}(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A)$. معنی عبارت دوم این است که مجموعه‌ی $\{\alpha([D]) | \alpha \in Aut(\mathfrak{C}/A)\}$ متناهی است (توجه پائین را ببینید).

توجه ۱۶۶.

$$\alpha(\mathbb{D}) = \alpha'(\mathbb{D}) \Leftrightarrow \alpha([\mathbb{D}]) = \alpha'([\mathbb{D}]).$$

بنابراین ۱ و ۲ با هم معادلند. اثباتِ ۳ به ۲. اگر $\alpha \in Aut(\mathfrak{C}/A)$ آنگاه $\alpha(\mathbb{D}) = \mathbb{F}'_۱ \ldots \cup \mathbb{F}'_n$ که $\mathbb{F}'_i$ ها کلاس‌های دیگری از رابطه‌ی هم‌ارزیِ آمده در شماره‌ی ۳ هستند. اثباتِ ۲ به ۳. فرض کنید $\mathbb{D}_۱, \ldots, D_n$ همه‌ی Aمزدوج‌های $\mathbb{D}$ باشند. تعریف کنید

$$x \mathbb{E} y \Leftrightarrow \bigwedge_i (x \in \mathbb{D}_i \leftrightarrow y \in \mathbb{D}_i).$$

این رابطه، Aناوردا و دارای کمتر از ۲^n کلاس است و $\mathbb{D}$ اجتماعی از کلاس‌هائی از آن است. □

تعریفِ ۱۶۷ (تعریفِ T^{eq}). فرض می‌کنیم که T تک‌بخشی باشد. برای هر رابطه‌ی هم‌ارزیِ صفرتعریف‌شدنیِ E روی nتائی‌ها (منظور این است که

$$T \models \text{ رابطه‌ی هم‌ارزی است } E)$$

یک بخشِ E به همراه یک تابعِ π_E به زبان می‌افزائیم که

$$\pi : (\text{بخشِ اصلی})^n \to E \quad n = n_E$$

و

$$T^{eq} = T \cup \{ \text{پوشا}\, \pi_E \} \cup$$
$$\forall x_۱ \ldots x_n \forall y_۱ \ldots y_n \quad \pi_E(y_۱, \ldots, y_n) = \pi_E(x_۱, \ldots, x_n) \leftrightarrow$$
$$(x_۱, \ldots, x_n) E (y_۱, \ldots, y_n).$$

هم‌چنین تعریف می‌کنیم

$$\mathfrak{C}^{eq} = (\mathfrak{C}, \mathfrak{C}^{n_E}/E, \ldots \pi_E, \ldots)$$
$$\pi_E : \mathfrak{C}^{n_E} \to \mathfrak{C}^{n_E}/E$$

تنها راه گسترشِ $\mathfrak{C}$ به مدلی از T^{eq}، ساختارِ بالا است. T^{eq} قرار است گسترشِ T با افزودنِ عناصرِ موهومی به آن باشد.

پرسشِ ۱۶۸. منظور از زبان تک‌بخشی چیست؟

بگذارید اول زبانِ چندبخشی را بشناسیم. فرض کنید S نمایانگر بخش‌ها باشد. L زبانی باشد که با این بخش‌ها متناظر است. یعنی هر مؤلفه‌های هر رابطه‌ی $R \in L$ به‌گونه‌ی $(s_1, \dots, s_n)$ هستند که $s_i \in S_i$. مؤلفه‌های هر تابعِ $f \in L$ به‌گونه‌ی $(s_0, s_1 \dots, s_n)$ هستند که در آن $s_i \in S_i$. وانگهی Lساختارها دارای جهانی به شکل

$$(A_s | s \in S)$$

هستند و

$$R^A \subseteq A_{s_1} \times A_{s_n} \quad f^A : A_{s_1} \dots \times A_{s_n} \to A_{s_0}$$

و فرمول‌ها دارای متغیرهائی در بخش‌های مختلفِ زبانند. مثلاً $x = y$ وقتی معنی دارد که متغیرهای x, y هر دو از یک بخشِ زبان آمده باشند.

مثالِ ۱۶۹. هندسه‌ی نقطه‌ها و خطها.

$$s = \{\text{خطها ,نقطه‌ها}\}$$
$$L = \{I\} \ _{I\text{رابطه‌ی قرارگیری نقطه بر خط}}$$

عموماً داشتن نامتناهی بخش کار را سخت می‌کند؛ قضیه‌ی فشردگی باید جداگانه برایش ثابت شود. در حالی که متناهی بخش را می‌توان با تعداد متناهی محمول جای‌گزین کرد.

مثالِ ۱۷۰. میدان‌های ارزیابی. (K, Γ). در این جا K یک میدان است و Γ یک گروه مرتب است و در زبان یک تابعِ $v : K \to \Gamma$ داریم که همان نگاشت ارزیابی است.

پرسشِ ۱۷۱. بررسی کنید که منظور از یک تئوری الف‌صفرجازم در یک زبان بسیاربخشی چیست.

گزاره‌ی ۱۷۲. ۱. عناصرِ $\mathfrak{C}^{eq}$ را می‌توان هماهنگ روی $\mathfrak{C}$ تعریف کرد.

۲. رابطه‌های صفرتعریف‌شدنی روی $\mathfrak{C}$ در $\mathfrak{C}^{eq}$ و در خودِ $\mathfrak{C}$ یکسانند.

۳. T^{eq} موهومات را حذف می‌کند.

اثبات. ۱. مشخص است: اعضای آن به گونه‌ی $\pi(\bar{x})$ هستند. ۲. T^{eq} سورهای روی بخش‌های تازه را حذف می‌کند: فرض‌کنید $x_1, \dots, x_n$ متغیرهائی از بخش‌های $E_1, \dots, E_n$ باشند و $\phi(x_1, \dots, x_n)$ فرمولی باشد در L_{eq}. فرمولی در L مانند $\psi(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ پیدا می‌شود که

$$T^{eq} \models \phi(\pi_{E_1}(\bar{y}_1, \dots)\pi_{E_n}(\bar{y}) \leftrightarrow \psi(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n). \quad (1)$$

این ادّعا را می‌توان با استقراء روی پیچیدگی فرمول‌ها ثابت کرد. اثباتِ ۳. راه اول.

$$\mathfrak{C}^n \to \mathfrak{C}^n / E$$
$$(\mathfrak{C}^n / E)^{n'} \to (\mathfrak{C}_n / E)^{n'} / E' (= \mathfrak{C}^{nn'} / E'')$$

راه دوم. فرض‌کنید $\mathbb{D}$ در $\mathfrak{C}^{eq}$ تعریف‌شدنی باشد.

توجه ۱۷۳. در $\mathfrak{C}^{eq}$ نیازی به در نظر گرفتنِ چندتائی‌ها نیست؛ زیرا:

$$\mathfrak{C}^n/E \times \mathfrak{C}^m/F \leftrightarrow \mathfrak{C}^{n.m}/E \times F.$$

که در بالا

$$\bar{x}\bar{y}(E \times F)(\bar{x}'\bar{y}') \leftrightarrow \bar{x}E\bar{x}' \wedge \bar{y}F\bar{y}'$$

و

$$\mathfrak{C}^n \leftrightarrow \mathfrak{C}^n/id.$$

ادامه‌ی اثبات. بنا بر ۱، $\mathbb{D}$ با پارامتر در $\mathfrak{C}$ تعریف‌شدنی است. فرض‌کنید $\mathbb{D} = \phi(\mathfrak{C}^{eq}, \bar{b})$. تعریف کنید

$$\bar{b}E\bar{b}' \Leftrightarrow \phi(\mathfrak{C}^{eq}, \bar{b}) = \phi(\mathfrak{C}^{eq}, \bar{b}').$$

حال داریم $\pi_E(\bar{b}) = [\mathbb{D}]$. □

لمِ ۱۷۴. ۱. T الف‌یک‌جازم است اگروتنهااگر T^{eq} الف‌یک‌جازم باشد.

۲. T λثابت است اگروتنهااگر T^{eq} λثابت باشد.

۳. T ثابت است اگروتنهااگر T^{eq} ثابت باشد.

اثبات. سومی را ثابت می‌کنیم. فرض‌کنید T^{eq} ثابت نباشد. فرض‌کنید $\phi(x,y)$ فرمولی در L^{eq} باشد که

$$\models \phi(a_i, b_j) \Leftrightarrow i < j$$

که در بالا، x و y به ترتیب از بخش‌های E و F آمده‌اند. گفتیم که نیازی نیست که پارامترها را چندتائی در نظر بگیریم.

$$\begin{aligned} & a_i = \pi_E(\bar{a}_i) \quad b_j = \pi_F(\bar{b}_j) \\ & \models \phi(\pi_E(\bar{a}_i)), \pi_F(\bar{b}_j)) \Leftrightarrow i < j \\ & \models \phi^*(\bar{a}_i, \bar{b}_j) \Leftrightarrow i < j. \end{aligned}$$

که فرمولِ ϕ^* در L مانندِ فرمولِ ψ در معادله‌ی ۱ به دست آمده است و فرمولی ثابت است.

ملاحظه‌ی ۱۷۵. درضمنِ این اثبات می‌بینیم که هر تئوری‌ای که در یک تئوریِ ناثابت تعبیر شود، خود نیز ناثابت است.

□

توجه ۱۷۶. تعریفِ T^{eq} و موهومیات، کارِ پوازا بوده است.

تعریفِ ۱۷۷. فرض‌کنید T کامل باشد. می‌گوئیم T موهوماتِ متناهی را حذف می‌کند هرگاه هر مجموعه‌ی متناهیِ $\{a_1, \ldots, a_n\}$ پارامترِکانونی داشته باشد.

ملاحظه‌ی ۱۷۸. T موهومات را اگروتنهااگر حذف می‌کند که هر $c \in \mathfrak{C}^{eq}$ با چندتائی‌ای در $\mathfrak{C}$ درهم‌تعریف‌شدنی باشد. یعنی

$$\forall c \in \mathfrak{C}^{eq} \quad \exists d \in \mathfrak{C} \quad d \in \operatorname{dcl}(c) \quad c \in \operatorname{dcl}(e).$$

تعریفِ ۱۷۹. فرض کنید T کامل باشد. می‌گوئیم T حذف ضعیفِ موهومات می‌کند هرگاه برای هر $c \in \mathfrak{C}^{eq}$ یک چندتائیِ $d \in \mathfrak{C}$ داشته‌باشیم که

$$c \in \operatorname{dcl}^{eq}(d) \quad d \in \operatorname{acl}(c).$$

لمِ ۱۸۰. T موهومات را حذف می‌کند اگروتنهااگر T موهوماتِ متناهی را حذف کند و حذفِ ضعیفِ موهومات داشته باشد.

اثبات. حذف ضعیفِ موهومات یعنی هر c با یک $[\{d_1, \ldots, d_n\}]$ دریک‌دیگرتعریف شوند که در آن d_i ها چندتائی‌هائی در $\mathfrak{C}$ هستند. فرض کنید $c \in \operatorname{dcl}(d)$ و $d \in \operatorname{acl}(c)$ و فرض‌کنید $d_1, \ldots, d_n$ مزودج‌های d/c باشند. آن‌گاه $[d_1, \ldots, d_n] \in \operatorname{dcl}(c)$. همچنین ازآن‌جاکه $c \in \operatorname{dcl}(d)$ داریم $c \in \operatorname{dcl}([\{d_1, \ldots, d_n\}])$؛ زیراکه $\{c\} = \phi(\mathfrak{C}, d) = \phi(\mathfrak{C}, d_i)$. □

جلسه‌ی سیزدهم

هدف: اثباتِ این که اِی‌سی‌اِف‌صفر موهومات را حذف می‌کند.

یادآوریِ ۱۸۱. T موهومات را حذف می‌کند اگروتنهااگر حذف ضعیف موهومات داشته باشد و موهومات متناهی را حذف کند.

حذف ضعیف:

$$\forall c \in \mathfrak{C}^{eq} \quad \exists \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \in \mathfrak{C} \quad c \sim \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$$

حذف موهومات متناهی

$$[\bar{a}, \ldots, \bar{a}_n] \in \mathfrak{C}$$

لمِ ۱۸۲ (پیلِیْ لاسْکار). اگر T بسیارکمینه باشد و $\operatorname{acl}(\emptyset)$ نامتناهی باشد، آن‌گاه T حذف ضعیف موهومات دارد.

مثالِ ۱۸۳ (نقضِ شرط بالا). روی $\mathbb{Q}$ تعریف کنید

$$R(a,b,c,d) \Leftrightarrow a+b+c+d=0.$$

(Q,R) همان $(Q,+)$ است که در آن صفر کنار گذاشته شده است (خط‌های آفین روی $\mathbb{Q}$). نشان دهید که این ساختار، بسیار کمینه است، ولی حذف ضعیف موهومات ندارد. دقت کنید که

$$(a,b) \sim (c,d) \leftrightarrow a-b=c-d.$$

اثبات قضیه‌ی ۱۸۲. باید نشان دهیم که برای هر رابطه‌ی هم‌ارزی روی $\mathfrak{C}^n$ و هر $c \in \mathfrak{C}^n$ عنصری چون $\bar{a} \in \mathfrak{C}$ پیدا می‌شود که $c/E \in \mathrm{dcl}^{eq}(\bar{a})$ و $\bar{a} \in \mathrm{acl}(c/E)$. اگر $\bar{a}$ را در c/E پیدا کنیم خودبه‌خود داریم $c/E \in \mathrm{dcl}^{eq}(a)$. برای یافتنِ چنین عنصری کافی است نشان دهیم که برای هر کلاسِ Aتعریف‌شدنیِ $\mathbb{D}$ در $\mathfrak{C}^{eq}$ داریم $\mathbb{D} \cap \mathrm{acl}(A)^n \neq \emptyset$. (مسئله. اگر $D \subseteq \mathfrak{C}^n$ روی $\mathrm{acl}(A) = \mathrm{acl}^{eq}(A) \cap \mathfrak{C}$ تعریف نشده باشد چه می‌شود).

توجه ۱۸۴. $\mathrm{acl}(A)$ زیرساختاری مقدماتی از $\mathfrak{C}$ است؛ زیراکه $\mathrm{acl}(A)$ نامتناهی و بسته‌ی جبری است (و بنا به مَحَکِ تارسکی).

با استقرا روی n حکم را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $n = ۱$. اگر $\mathbb{D}$ متناهی باشد آن‌گاه ازآن‌جاکه $\mathbb{D}$ روی A تعریف‌شده است، داریم $\mathbb{D} \subseteq \mathrm{acl}(A)$. اگر مُکمّلِ $\mathbb{D}$ متناهی باشد داریم $\mathbb{D} \cap \mathrm{acl}(\emptyset) = \emptyset$. قدمِ $n + ۱$ استقرا . فرض‌کنید $\pi : \mathfrak{C}^{n+۱} \to \mathfrak{C}$ نگاشت تصویر باشد. آن‌گاه $\pi(\mathbb{D})$ Aتعریف‌شدنی است. بنا به حالتِ $n = ۱$ یک عنصرِ $a \in \pi(\mathbb{D}) \cap \mathrm{acl}(A)$ پیدا می‌شود. هم‌چنین

$$D_a = \{x \in \mathfrak{C}^n | (a, x) \in \mathbb{D}\} \neq \emptyset.$$

و $\mathbb{D}_a$ روی $\mathrm{acl}(A)$ تعریف می‌شود. بنابراین یک عنصرِ $b \in \mathbb{D}_a \cap \mathrm{acl}(A)^n$ پیدا می‌شود که درنتیجه‌ی آن $(a, b) \in \mathbb{D} \cap \mathrm{acl}(A)^{n+۱}$. □

نتیجه‌ی ۱۸۵. ACF_p حذف موهومات دارد.

اثبات. ۱. این تئوری بسیارکمینه است؛

۲. $\mathrm{acl}(\emptyset)$ نامتناهی است.

۳. موهومات متناهی را حذف می‌کند.

حکم از سه شماره‌ی بالا نتیجه می‌شود. سومی نیاز به اثبات دارد: مجموعه‌ی $\{\bar{a}_۱, \ldots, \bar{a}_n\}$ را در نظر بگیرید که در آن $\bar{a}_i = a_{۱i} \ldots a_{ki}$. تعریف‌کنید

$$p_i(y_۱, \ldots, y_k) = \sum_{j=۱}^{k} a_{ji} y_j.$$

و

$$p(x, y_۱, \ldots, y_k) = \prod_{i=۱}^{n} (x - p_i(y_۱, \ldots, y_k)).$$

داریم

$$\text{ضرایبِ } p = [\bar{a}_۱, \ldots, \bar{a}_n]$$

□

نتیجه‌ی ۱۸۶. فرض‌کنید $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{C}$. بگیرید

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i) = \sum_{i=1}^{n} \pm\sigma_i(a_1, \ldots, a_n)x^i$$

داریم

$$[a_1, \ldots, a_n] = (\sigma_0(\bar{a}), \ldots, \sigma^n(\bar{a})).$$

لمِ ۱۸۷. فرض‌کنید T بسیارمتعالی باشد. اگر هر تایپِ جهانی در T پایه‌ی کانونی داشته باشد، آنگاه T دارای حذف ضعیفِ موهومات است. (توجه کنید که اگر T حذف موهومات داشته باشد، هر تایپ جهانی دارای پایه‌ی کانونی است).

اثبات. عنصرِ $c/E \in \mathbb{C}^{eq}$ را در نظر بگیرید. فرض‌کنید

$$\underbrace{\mathrm{RM}(c/E)}_{\text{هم‌چون کلاسی تعریف‌شدنی}} = \mathrm{RM}(xEc) = \alpha.$$

فرض‌کنید $P_1, \ldots, P_n$ تایپهای جهانی با $\mathrm{RM} = \alpha$ باشند که فرمولِ xEc را دربردارند. فرض‌کنید $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ پارامترهای کانونیِ P_i ها باشند (که شاید هر یک نامتناهی باشد ولی این‌جا آنها را متناهی فرض کرده‌ایم). اگر $\alpha \in Aut(\mathfrak{C})$ کلاسِ c/E را ثابت نگه ندارد، آنگاه تایپهای P_i و $\bar{a}_i$ ها را جایگردان می‌کند (جابه‌جا می‌کند). بنابراین $[\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n] \in \mathrm{acl}(c/E)$. هر اتومرفیسمِ α ای که $\bar{a}_i$ را جابه‌جاکند، P_i ها را جابه‌جا می‌کند:

$$xEc \in P \Rightarrow xE\alpha(c) \in \alpha(P)$$

هم‌چنین

$$xEc \in \alpha(P_i) \Rightarrow cE\alpha(c)$$

عبارت سمت راست را به این علت داریم که اگر چنین نباشد، c/E و $\alpha(c)/E$ از هم مجزا خواهند بود. □

تمرین ۱۸۸. فرضِ متناهی گرفتنِ تعدادِ $\bar{a}_i$ را توجیه کنید. نشان دهید که در تئوری‌های بسیارمتعالی هر تایپ دارای پایه‌ی کانونیِ متناهی است.

پایه‌های کانونی برای تایپ‌های جهانی در ACF_p.

فرض‌کنید $p(\bar{x})$ که در آن $|\bar{x}| = n$ یک تایپِ جهانی باشد. آنگاه p را یک چندگونای کاهش‌ناپذیرِ V روی $\mathfrak{C}$ بوسیله‌ی $\mathrm{tp}(\bar{x}/\mathfrak{C})$ تعیین می‌کند که در آن $\bar{x}$ یک نقطه‌ی مولد برای V است. از نگاهی دیگر، p تایپی است دارای مرتبه‌ی مُرلیِ برابر با $\mathrm{RM}(V)$ و به‌گونه‌ای که $``\bar{x} \in V" \in p$. فرض کنید I ایده‌آل محوکننده‌ی V

باشد. داریم

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cb}(p) = [V] = [I]\\
&I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\\
&I_k = \{p \in I \mid \deg p \leq k\} \underbrace{\preceq}_{\text{هم‌چون زیرفضای برداری}} \mathfrak{C}^{N(k)}\\
&N(k) = k \text{ تعداد چندجمله‌ای‌های یکانی در متغیرهای } X_1, \dots, X_n \text{ با درجه‌ی }\\
&[I] = \bigcup_{k=0}^{\infty} [I_k].
\end{aligned}$$

تمرین ۱۸۹. فرض کنید $\mathfrak{C}$ یک میدان باشد و $U \preceq \mathfrak{C}^n$ هم‌چون $\mathfrak{C}$فضاهای برداری. نشان دهید که $[U]$ در $\mathfrak{C}$ است. پاسخ این سوال شاید در کتاب هندسه‌ی جبریِ آندره وِیْلْ پیدا شود. برای مثال اگر $U = \mathfrak{C}.(a_1, \dots, a_n)$ آن‌گاه $[U] = (\frac{a_2}{a_1}, \dots, \frac{a_n}{a_1})$. توجه کنید که اگر $U = \mathfrak{C}.(1, 1, 0, 0, \dots)$ آن‌گاه $[U] = \emptyset$.

فُرکِش در تئوری‌های ثابت

در ادامه فرض کرده‌ایم که T یک تئوریِ ثابت باشد.

تعریفِ ۱۹۰. تایپِ $p \in S(B)$ دارای تعریفِ مناسبِ $d_p x\phi(x, y)$ است هرگاه این تعریف یک تایپِ جهانی به دست دهد.

مثالِ ۱۹۱. اگر $B = M$ یک مدل باشد، هر تعریفی مناسب است.

قضیه‌ی ۱۹۲. فرض‌کنید $A \subseteq B$. تایپِ $p \in S(B)$ روی A نمی‌فرکد اگروتنهااگر تعریفِ مناسبی روی $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ داشته باشد.

اثبات. فرض کنید p تعریف مناسبی روی $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ داشته باشد. بگذارید $\mathbb{P}$ تایپِ جهانی‌ای باشد که این تعریف بدست می‌دهد. می‌دانیم که $\mathbb{P}$ روی $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ نمی‌فرکد. از این نتیجه می‌گیریم که $\mathbb{P}$ روی A نمی‌فرکد (چگونه؟ در ادامه توضیح داده‌ایم) که در نتیجه‌ی آن p نیز روی A نمی‌فرکد.
پاسخِ «چگونه». پاسخ اول. اگر $\phi(x, b)$ روی A بخش شود، روی $\mathrm{acl}(A)$ نیز بخش می‌شود.

اثبات. نشان دهید که اگر $b_0 b_1 \dots$ دنباله‌ای بازنشناختنی روی A باشد، این دنباله روی $\mathrm{acl}(A)$ نیز بازنشناختنی است. (هم مستقیم می‌توان ثابت کرد و هم با کمک اتومرفیسم‌ها). □

پاسخ دوم. فرض‌کنید

$$A \subseteq B \quad c \models p \restriction B \quad c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{acl}(A)} B$$

ازآن‌جاکه $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A \mathrm{acl}(A)$ داریم $\mathrm{acl}(A) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A c$. حال بنا به خاصیت تعدی داریم $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$. □

اثباتِ جهت دیگر. فرض‌کنید که p روی A نمی‌فرکد. بگذارید $p \subset \mathbb{P}$ گسترشِ جهانی‌ای باشد که روی A نمی‌فرکد. تایپِ $\mathbb{P}$ روی هیچ مدلِ $A \subset M$ نمی‌فرکد. ازآن‌جاکه T ثابت است از این نتیجه می‌گیریم که $\mathbb{P}$ روی هر مدلِ $A \subset M$ تعریف‌شدنی است؛ و درنتیجه $cb(\mathbb{P}) \in M^{eq}$. پس نشان داده‌ایم که برای هر مدلِ M که A را دربردارد $cb(\mathbb{P}) \in M^{eq}$. بنا به تمرینِ زیر، این معادل است با $cb(\mathbb{P}) \in \operatorname{acl}^{eq}(A)$. □

پایان اثباتِ قضیه.

تمرین ۱۹۳. نشان دهید که

$$\operatorname{acl}(A) = \bigcap_{M \models T, A \subseteq M} M$$

جلسه‌ی چهاردهم

فرض کنید T یک تئوریِ ثابت باشد.

یادآوریِ ۱۹۴. تایپِ $p \in S(B)$ روی A نمی‌فرکد اگروتنهااگر دارای تعریف خوبی روی $\operatorname{acl}^{eq}(A)$ باشد.

تعریفِ ۱۹۵. تایپِ $p \in S(A)$ را مانا [۱۰] می‌خوانیم هرگاه p فقط و فقط یک گسترشِ جهانی نافرکان داشته باشد.

ملاحظه‌ی ۱۹۶. شرطِ آمده در تعریف معادل این است که برای هر $A \subset B$ تایپِ p تنها یک گسترشِ نافرکان به B داشته باشد.

توجه ۱۹۷. اگر T ثابت باشد و M مدلی از آن، هر $p \in S(M)$ تنها یک گسترشِ نافرکان به هر $M \subset B$ دارد.

نتیجه‌ی ۱۹۸ (از نتیجه‌ی ۱۹۴). فرض‌کنید T ساده باشد. هر تایپِ روی $\operatorname{acl}^{eq}(A)$ مانا است.

نتیجه‌ی ۱۹۹. در تئوری‌های ثابت، هر تایپ روی یک مدل مانا است.

اثبات.

تمرین ۲۰۰. نشان دهید

$$\operatorname{acl}^{eq}(M) = \operatorname{dcl}^{eq}(M) = M.$$

در تمرین بالا نشان داده‌ایم که M تحتِ acl^{eq} «اخلاقی» بسته است! □

اثباتِ ۱۹۸ .

[۱۰] stationary

توجه ۲۰۱. فرض‌کنید $p \in S(B)$ و $p \subseteq \mathbb{P}', \mathbb{P}''$ و $\mathbb{P}'$ و $\mathbb{P}''$ روی B تعریف‌شدنی باشند و $\operatorname{tp}(c/B)$ دارای تعریفِ خوبی روی B باشد. آن‌گاه

$$\phi(x,c) \in \mathbb{P}' \Leftrightarrow \phi(x,c) \in \mathbb{P}''.$$

توجهِ بالا را با استفاده از لمِ هَرینْگْتون ثابت می‌کنیم. فرض کنید $\mathbb{Q} \supseteq \operatorname{tp}(c/B)$ روی B تعریف‌شدنی باشد. داریم

$$\begin{aligned}
&\phi(x,c) \in \mathbb{P} \Leftrightarrow \\
&c \models \underbrace{d_{\mathbb{P}'} x \phi(x,y)}_{\text{تعریف‌شده روی } B} \Leftrightarrow \\
&d_{\mathbb{P}'} x \phi(x,y) \in \operatorname{tp}(c/B) \Leftrightarrow \\
&d_{\mathbb{P}'} x \phi(x,y) \in \mathbb{Q} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{هرینگتون}} \\
&\underbrace{d_{\mathbb{P}} y \phi(x,y)}_{\text{تعریف‌شده روی } B} \in \mathbb{P} \Leftrightarrow d_{\mathbb{Q}} y \phi(x,y) \in p
\end{aligned}$$

□

در ادامه در T^{eq} بحث می‌کنیم.

قضیه‌ی ۲۰۲. فرض‌کنید T ثابت باشد. آن‌گاه $\perp$ دارای ویژگی‌های زیر است:

۱. یکنوائی و تعدی.

۲. تقارن

۳. مشخصه‌ی متناهی:

$$a \underset{A}{\perp} B \Leftrightarrow \forall \underbrace{b \in B}_{\text{متناهی}} \quad a \underset{A}{\perp} b$$

۴. مشخصه‌ی موضعی:

$$\forall a, B \quad \exists A \subseteq B \quad |A| \leq |T| \quad a \underset{A}{\perp} B.$$

۵. وجود. اگر $p \in S(A)$ و $A \subseteq B$ آن‌گاه p دارای گسترشی نافرکان به B است.

۶. بستار جبری:

- $a \perp_A \operatorname{acl} A$.
- $a \perp_A a \Rightarrow a \in \operatorname{acl}(A)$.

قضیه‌ی ۲۰۳. فرض‌کنید T ثابت باشد.

۱. اگر $A \subseteq M$ و M به‌اندازه همگن باشد و $p \in S(A)$، آنگاه همه‌ی گسترش‌های نافرکانِ p به M روی A مزدوجند.

۲. اگر $A \subseteq B$ و $p \in S(A)$، آنگاه p بیشینه $2^{|T|}$ گسترشِ نافرکان به B دارد.

ملاحظه‌ی ۲۰۴. همان گونه که در بالا گفته‌ایم هر تایپِ $p \in S(A)$ دارای گسترشی فرکان به هر $B \supset A$ است؛ ولی برای یک B ثابت، تعداد گسترش‌های فرکانِ p به B محدود است.

تمرین ۲۰۵. نشان دهید هر دو شماره در قضیه‌ی ۲۰۳ برای گراف‌های تصادفی نادرستند.

اثبات. ۱. با سهل‌انگاری فرض می‌کنیم $\mathrm{acl}(A) \subseteq M$. فرض‌کنید $q \supset p$ گسترش نافرکی از p به M باشد. آنگاه q روی $\mathrm{acl}(A)$ نمی‌فرکد. می‌توان q را با $p' = q \upharpoonright \mathrm{acl}(A)$ معیّن کرد.

$$\begin{tikzcd} M & q \\ \mathrm{acl}(A) \arrow[u] & p' \arrow[u] \\ A \arrow[u] & p \arrow[u] \end{tikzcd}$$

ادّعای ۲۰۶. همه‌ی p' ها روی A مزدوجند.

اثبات. فرض کنید $a' \models p'$ و $a'' \models p''$. داریم

$$\exists \alpha \in Aut(\mathfrak{C}/A) \quad \alpha(a') = a''$$

ولی $\alpha(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A)$. هرگاه M به‌اندازه‌اشباع باشد، می‌توان $\alpha \upharpoonright \mathrm{acl}(A)$ را به $Aut(M/A)$ گستراند. $\square$

۲. زیرمجموعه‌ی $A_\circ \subseteq A$ را چنان انتخاب کنید که $|A_\circ| \leq T$ و p روی $A_\circ$ نفرکد. هر گسترش نافرکانِ q از p به B به گونه‌ی $q = q' \upharpoonright B$ برای یک $q' \in S(B\,\mathrm{acl}(A_\circ))$ است.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] & B\,\mathrm{acl}\,A_\circ \\ A \arrow[u] & \\ \mathrm{acl}\,A_\circ \arrow[u] \arrow[uur] & \end{tikzcd}$$

تایپِ q' روی $A_\circ$ و ازاین‌رو روی $\operatorname{acl}(A_\circ)$ نمی‌فرکد. هم‌چنین q' را می‌توان با $p'' = q' \restriction \operatorname{acl} A_\circ$ معیّن کرد. بنابراین

$$\#q' = \#\{p'' | p'' \supseteq p \restriction A_\circ\} \leq \#S(\operatorname{acl} A_\circ) \leq ۲^{|T|}.$$

□

قضیه‌ی ۲۰۷ (قضیه‌ی نگاشتِ باز).

$$\begin{tikzcd} B & & S(B) \supset N(B/A) \arrow[d, "\pi"'] \\ A \arrow[u] & & S(A) \end{tikzcd}$$

$$N(B/A) := \{q \in S(B) | \text{نمی‌فرکد } A \text{ روی } q\}$$

$N(B/A)$ در $S(B)$ بسته است. نگاشتِ π روی $N(B/A)$ نگاشتی باز است؛ یعنی مجموعه‌های باز را به مجموعه‌های باز می‌برد.

اثبات. بی کاستن از کُلّیت فرض می‌کنیم $B = \mathfrak{C}$.

$$\begin{tikzcd} S(B) \arrow[r] \arrow[d] & N(B/A) \arrow[dl, "\pi"'] \\ S(A) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} N(\mathfrak{C}/A) \arrow[d, "\text{پوشا}"'] \\ N(B/A) \arrow[d] \\ S(A) \end{tikzcd}$$

فرض کنید $O \subseteq N(\mathfrak{C}/A)$. آن‌گاه

$$\pi^{-۱}\pi(O) \underbrace{=}_{\text{بنابه‌مزدوج‌بودن}} \bigcup\{\pi(O)^\alpha | \alpha \in Aut(A)\}$$

و از این‌رو $\pi^{-۱}\pi(O)$ باز است. داریم

$$S(A) - \pi(O) = \pi(\underbrace{N(\mathfrak{C}/A) - \pi^{-۱}\pi O}_{\text{بسته}})$$

بنابراین $\pi(O)$ باز است. □

جلسه‌ی پانزدهم

قضیه‌ی ۲۰۸. فرض‌کنید T یک تئوری کاملِ دلخواه باشد و $n >$ ۱ را ثابت بگیرید.

۱. T ثابت است اگروتنهااگر یک مفهومِ $p \sqsubset q$ (یا یک مفهومِ

$$a \overset{\sqsubset}{\perp} B \Leftrightarrow \mathrm{tp}(a/AB) \sqsupset \mathrm{tp}(a/A))$$

برای گسترشِ nتایپ‌ها با ویژگی‌های زیر داشته باشیم:

آ $\sqsubset$ تحت $Aut(\mathbb{C})$ ناوردا است.

ب

$$\exists \kappa \quad \forall q \in S_n(C) \quad \exists C_\circ \subseteq C \quad |C_o| \leq \kappa \quad q \restriction C_\circ \sqsubset q.$$

ج (ویژگیِ کرانداریِ ضعیف)

$$\forall p \in S_n(A) \quad \exists \mu \quad \forall B \supset A \quad \exists^{\leq \mu} q \in S(B) \quad p \sqsubset q.$$

۲. اگر $\sqsubset$ علاوه بر ویژگی‌های بالا ویژگی‌های د، ه، و در زیر را نیز داشته‌باشد،

د وجود.

$$\forall p \in S(A) \quad A \subseteq B \quad \exists q \in S(B) \quad p \sqsubset q.$$

ه تعدی:

$$p \sqsubset q \sqsubset r \Rightarrow p \sqsubset r$$

و یکنوائیِ ضعیف:

$$p \sqsubset q \sqsubset r \quad p \subset r \Rightarrow p \sqsubset q$$

آن‌گاه

$$\sqsubset = \text{نفرکیدن}$$

اثبات. اگر T ثابت باشد، می‌گیریم

$$\sqsubset = \sqsubset_{\text{نفرکیدن}}$$

شماره‌های آ تا و برای $\kappa = |T|$ و $\mu =$ ۲$^{|T|}$ برقرارند.
اثباتِ جهت عکس.

یادآوریِ ۲۰۹. تئوریِ T λثابت است اگروتنهااگر برای هر A اگر $|A| \leq \lambda$ آنگاه $|S_n(A)| \leq \lambda$، برای یک n و معادلا برای $n =$ ۱. تئوریِ T ثابت است هرگاه λثابت برای یک کاردینالِ λ باشد.

ادامه‌ی اثبات. سوال. چند nتایپ روی $|A| = \lambda$ داریم؟ برای یافتن پاسخ این سوال باید تعدادِ A_0 هائی که $A_0 \subseteq A$ و تعداد تایپ‌های روی A_0 و تعداد گسترش‌های این تایپ‌ها به A را بشماریم.
فرض‌کنید $p \in S_n(A)$ و $A_0 \subseteq A$ و $|A_0| \leq \kappa$ و $p \sqsubset A_0$ $p^* = p \restriction A_0$. چند A_0 با این ویژگی‌ها داریم؟
پاسخ: $\leq \lambda^\kappa$.
چند $p^* = p \restriction A_0$ روی A_0 داریم؟
پاسخ $\leq 2^{\max\{\kappa, |T|\}}$.
پس در مجموع برای $\kappa \geq |T|$ تعداد p^* ها می‌شود $\leq \lambda^\kappa$.
تحتِ یکی‌گرفتن ساختارها با تصویرشان تحت یک اتومرفیسم در $Aut(\mathfrak{C})$ چند A_0 در $\mathfrak{C}$ داریم؟
پاسخ. کمتر مساوی تعداد ساختارها؛ یعنی $\leq 2^\kappa$.
بنا به ج برای هر p^* تحت یکی گرفتن تحت اتومرفیسم‌ها، تنها $\leq 2^\kappa$ تایپِ p^* داریم. بنابراین یک μ^* پیدا می‌شود که برای همه‌ی $|A_0| \leq \kappa$ کار کند. یعنی $p*$ دارای $\leq \mu^*$ گسترش به A است. داریم

$$|S_n(A)| \leq \underbrace{\lambda^\kappa}_{\text{تعدادِ } p^*} \cdot \underbrace{\mu^*}_{\#\{p | p \sqsupset p^*\}}$$

بنابراین اگر $\mu^* \leq \lambda$ و $\lambda^\kappa = \lambda$ آنگاه T یک تئوریِ λثابت است. برای مثال می‌شود گرفت $\lambda = (\mu^*)^\kappa$.
حال فرض کنید که د و ه و و نیز برقرار باشند. فرض کنید $p \sqsubset q$.

توجه ۲۱۰. اگر q روی A بفرکد، q دارای هر تعدادِ دلخواه مزودجْ روی A است. (اثبات. برای بخش کردن در حالت کلی برقرار است. برای تئوری‌های ثابت، می‌شود این‌گونه برای فرکیدن ثابتش کرد: فرض کنید $b = cb(p)$. آنگاه $b \notin acl^{eq}(A)$. بنابراین p دارای هر تعداد دلخواه مزودج روی A است.)

فرض کنید

$$A \subseteq B \quad p \in S(A) \quad q \in S(B) \quad p \sqsubset q$$

مدلِ اشباعِ $B \subset M$ و تایپِ بنا به د موجودِ $q' \in S(M)$ را که $q \sqsubset q'$ انتخاب کنید. این تایپ دارای حداکثر $\mu(p)$ مزودجِ q'^α است (بنا به $q'^\alpha \sqsubset p$ و آ و ه.) اکنون بنا به توجهِ ۲۱۰ نتیجه می‌گیریم که $q' \sqsubset_{\text{نفرکیدن}} p$ و از آن نتیجه می‌گیریم که $q \sqsubset_{\text{نفرکیدن}} p$.

توجه ۲۱۱. فرض کنید $q|_A = q^*|A$ و q و q^* روی A نفرکند. آنگاه q و q^* روی A مزدوجند.

ادامه‌ی اثبات. فرض کنید $q \sqsubset_{\text{نفرکیدن}} p$. می‌خواهیم نشان دهیم که $p \sqsubset q$. می‌شود فرض‌کرد که $q \in S(M)$ و $A \subseteq M$ و M مدلی اشباع است (وگرنه

$$p \sqsubset_{\text{نفرکیدن}} q \sqsubset_{\text{نفرکیدن}} q' \in S(M) \quad p \sqsubset_{\text{نفرکیدن}} q'$$

در حالی که بنا به و داریم $p \sqsubset q$). بنا به د یک تایپِ $q^* \in S(M)$ را چنان انتخاب کنید که $p \sqsubset q^*$.
می‌دانیم که $q^* \sqsubset_{\text{نفرکیدن}} p$. بنابراین q و q^* مزدوجند. پس $p \sqsubset q^*$ و درنتیجه $p \sqsubset q$. $\square$

در ادامه فرض کرده‌ایم که T ساده باشد.

تعریفِ ۲۱۲. به استقرا $SU(p) \geq \alpha$ را به گونه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

۱. همیشه داریم $SU(p) \geq 0$.

۲. $SU(p) \geq \lambda \Leftrightarrow (\forall \alpha < \lambda \quad SU(p) \geq \alpha)$.

۳. $SU(p) \geq \alpha + 1 \Leftrightarrow (\exists q \sqsupset_{\text{فرکیدن}} p \quad SU(q) \geq \alpha)$.

هم‌چنین تعریف می‌کنیم

$$SU(p) = \sup\{\alpha | SU(p) \geq \alpha\} \in On \cup \{\infty\}.$$

لمِ ۲۱۳. فرض کنید $p \subseteq q$ آنگاه

۱. $SU(p) \leq SU(q)$.

۲. $p \sqsubset_{\text{نفرکیدن}} q \Rightarrow SU(p) = SU(q)$.

۳. $SU(p) = SU(q) < \infty \Rightarrow p \sqsubset_{\text{نفرکیدن}} q$.

تمرین ۲۱۴. چرا $< \infty$ در بالا نیاز است؟ نشان دهید اگر $SU(p) = \infty$ آنگاه یک گسترشِ $q \sqsupset_f p$ داریم که $SU(q) = \infty$.

اثبات. ۱. با استقراء روی α نشان می‌دهیم که اگر $SU(q) \geq \alpha$ آنگاه $SU(p) \geq \alpha$. توجه کنید که

$$p \subseteq q \sqsubset_{\text{فرکیدن}} q' \Rightarrow p \sqsubset_{\text{فرکیدن}} q'.$$

۲. برای اثبات این حکم به لمِ «الماس» داریم:

$$\begin{tikzcd}
& q' & \\
q \arrow[ur] & & (p')^{\alpha} \arrow[ul, "\text{نفرکیدن}"'] \\
& p \arrow[ul, "\text{نفرکیدن}"] \arrow[ur] \arrow[r] & p'
\end{tikzcd} \qquad \forall q, p, p' \quad \exists \alpha \in Aut, q'$$

توجه کنید که اگر در بالا $p \sqsubset_{\text{فرکیدن}} p'$ آنگاه $q \sqsubset_{\text{فرکیدن}} q'$ $\square$

جلسه‌ی شانزدهم

یادآوری. گفتیم اگر T ساده باشد تعریف می‌کنیم

$$SU(p) = \sup\{SU(q) + 1 | p \sqsubset_f q\} \in On \cup \{\infty\}.$$

گفتیم که برای $p \subseteq q$ ویژگی‌های زیر را داریم

۱. $SU(p) \leq SU(q)$.

۲.

$$SU(p) < \infty \Rightarrow [SU(p) = SU(q) \Leftrightarrow p \sqsubset_{nf} q]$$

۳.

$$\alpha < SU(p) < \infty \Rightarrow \exists q \sqsupset_f p \quad SU(q) = \alpha.$$

ملاحظه‌ی ۲۱۵. همواره داریم

$$SU(p) < (2^{|T|})^+.$$

اثبات. برای هر p با $SU(p) < \infty$ یک $p \sqsubset_{nf} q$ پیدا می‌شود که $|q| \leq |T|$ و ازاین‌رو $SU(q) = SU(p)$. بنابراین

$$\#\{SU(p)\} \leq \#\{q : |q| \leq |T|\} \leq 2^{|T|}.$$

بعلاوه، $\{SU(q) | p \sqsubset_f q\}$ یک قطعه‌ی ابتدائی از اردینال‌هاست با اندازه‌ی کاردینالیِ $\leq 2^{|T|}$؛ بنابراین اندازه‌ی اردینالیِ آن $< (2^{|T|})^+$ است. □

نتیجه‌ی ۲۱۶.

$$SU(p) = \infty \Rightarrow \exists p \sqsubset_f q \quad SU(q) = \infty.$$

اثبات. وگرنه، $\{SU(p) | p \sqsubset_f q\}$ یک کلاسِ سره است. □

نتیجه‌ی ۲۱۷.

$$SU(p) = \infty \Leftrightarrow p = p_0 \sqsubset_f p_1 \sqsubset_f \ldots .$$

تعریفِ ۲۱۸. تئوریِ T را بسیارساده [11] می‌خوانیم هرگاه برای هر $p \in S(A)$ یک مجموعه‌ی متناهیِ $A_0 \subseteq A$ پیدا شود که p روی A_0 نفرکد.

نتیجه‌ی ۲۱۹. T بسیارساده است اگروتنهااگر هر تایپ دارای مرتبه‌ی SU باشد. (یعنی مرتبه‌ی SU هیچ تایپی ∞ نباشد).

منظور از تئوری بسیارثابت، [12] یک تئوریِ ثابتِ بسیارساده است. اگر T ثابت باشد، مرتبه‌ی SU برابر است با مرتبه‌ی لاسکار، یا همان Uمرتبه.

تمرین ۲۲۰. نشان دهید که برای تعریفِ بسیارساده، تنها درنظر گرفتنِ تایپ‌های یک‌متغیره کافی است: T بسیارساده است هرگاه هر تایپِ یک‌متغیره دارای مرتبه‌ی SU باشد.

[11] supersimple

[12] superstable

یادآوری می‌کنیم که T ثابت است هرگاه هر فرمولِ $\phi(x,y)$ در آن ثابت باشد. هم‌چنین می‌دانیم که

لمِ ۲۲۱. T ثابت است اگروتنهااگر λثابت برای یک λ باشد.

حکمِ لمِ بالا در اوایل، تعریف ثابت بودن بود.

قضیه‌ی ۲۲۲. فرض کنید T شمارا باشد. تعریف کنید

$$\text{طیف}(T) = \{\lambda | \text{ثابت است} \ \lambda \text{، } T\}$$

۱. اگر T بسیارمتعالی باشد

$$\text{طیف}(T) = \{\lambda | \lambda \geq \aleph_0\}.$$

۲. اگر T بسیارثابت و نه بسیارمتعالی باشد

$$\text{طیف}(T) = \{\lambda | \lambda \geq 2^{\aleph_0}\}.$$

۳. اگر T ثابت و نه بسیارثابت باشد

$$\text{طیف}(T) = \{\lambda | \lambda^{\aleph_0} = \lambda\}.$$

اثبات. اثباتِ ۲. اگر T بسیارثابت ولی نه ωثابت باشد داریم

$$\text{طیف}(T) \subseteq \{\lambda | \lambda \geq 2^{\aleph_0}\}.$$

برای اثباتِ $\supset$. فرض‌کنید $|A| \leq \lambda$ و $p \in S(A)$. مجموعه‌ی متناهیِ $A_0 \subseteq A$ را داریم که p روی آن نمی‌فرکد. ازآن‌جاکه T ثابت است برای هر $p_0 \in S(A_0)$ تعدادِ $2^{|T|} \leq$ تایپ در $S(A)$ داریم که $p \sqsubset_f p_0$.
بنابراین

$$|S(A)| \leq 2^{\aleph_0}.\#A_0.|S(A_0)| \leq 2^{\aleph_0}.\lambda.2^{\aleph_0} = \max(2^{\aleph_0}, \lambda).$$

بنابراین $\text{طیف}(T) \supset \{\lambda | \lambda \geq 2^{\aleph_0}\}$.

اثباتِ ۳. اگر T ثابت باشد و

$$|A| = \lambda \quad p \in S(A)$$

آن‌گاه

$$\exists \underbrace{A_0}_{\text{شمارا}} \subseteq A \quad p_0 = p \upharpoonright A_0 \sqsubset_{nf} p.$$

بنابراین

$$|S(A)| \leq 2^{\aleph_0} \cdot \lambda^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = \lambda^{\aleph_0}.$$

یعنی $\text{طیف}(T) \supset \{\lambda|\lambda^{\aleph_0}=\lambda\}$. ازآنجاکه T بسیارثابت و نه ثابت است تایپی مانند p_0 داریم که $SU(p_0)=\infty$. فرض کنید

$$p_0 \in S(A_0) \quad |A_0|=\lambda \quad \lambda \geq \aleph_0.$$

فرض‌کنید $p_0 \sqsubset_f p'$ گسترشی از p باشد که $SU(p')=\infty$ و $p' \in A_1$. اگر $A_1 \preceq \mathcal{C}$ به‌اندازه‌اشباع باشد، p' دارای λ مزدوج روی A_0 خواهد بود. بنابراین در یکی از این‌ها A_1 ای پیدا می‌شود که $|A_1|=\lambda$. هم‌چنین در $S(A_1)$ به تعدادِ λ گسترشِ p^α از p_0 داریم که $SU(p^\alpha)=\infty$. به همین ترتیب ادامه می‌دهیم و می‌رسیم به

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq$$

که در آن $|A_i|=\lambda$ و تایپ‌های $p_{\alpha_1,\dots,\alpha_i} \in S(A_i)$ همه متمایز را به گونه‌ای می‌یابیم که

$$p_{\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1}} \subseteq p_{\alpha_1,\dots,\alpha_i}$$

و $SU=\infty$. بنابراین روی $B=\bigcup A_i$ تعداد تایپ‌ها $\geq \lambda^{\aleph_0}$ است؛ ولی $|B|=\lambda$. بنابراین

$$\text{طیف}(T) \subseteq \{\lambda|\lambda^{\aleph_0}=\lambda\}.$$

□

جلسه‌ی هفدهم

فرض کرده‌ایم که T کامل و ثابت است و موهومات را حذف می‌کند.

گسترشِ اوّل

فرض کنید A یک مجموعه‌ی پارامتر باشد. مدلِ $M \supset A$ را روی A اوّل می‌خوانیم هرگاه برای هر مدلِ $N \supset A$ و هر نگاشتِ مقدماتیِ $f: A \to N$ یک نشاندنِ مقدماتیِ $M \to N$ داشته باشیم که نمودار زیر را کامل کند.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\subset"'] & N \\ M \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

توجه کنید که تعریف بالا در مدل هیولا در نظر گرفته شده است. اگر بخواهیم بدون مدل هیولا، مدلِ اولیه را تعریف کنیم باید بگوئیم که M یک مدل است و A زیرمجموعه‌ای از آن.

لمِ ۲۲۳. در تئوری‌های ثابت، دنباله‌های بازنشناختنی و دنباله‌های بسیاربازنشناختنی، یکی‌اند.

قضیه‌ی ۲۲۴. فرض کنید T ثابت باشد. اگر $I = (a_i)_{i\in I}$ دنباله‌ای بازنشناختنی روی مجموعه‌ی پارامترِ A باشد، آن‌گاه یک مجموعه‌ی پارامترِ $A \subset B$ و یک تایپِ مانای $p \in S(B)$ داریم که I دنباله‌ای مُرلی در p است.

اثبات. برای هر فرمولِ $\phi(x,\bar{b})$ مجموعه‌ی زیر را تعریف کنید:

$$J_\phi = \{i \in I | \models \phi(a_i,\bar{b})\}.$$

یا J_ϕ و یا $I - J_\phi$ متناهیند (چرا؟). بنابراین برای هر ϕ یک عددِ k_ϕ داریم که یا $|J_\phi| < k_\phi$ و یا $|I - J_\phi| < k_\phi$.

تایپِ میانگینِ I بنا به تعریف، تایپِ جهانیِ زیر است:

$$Av(I) = \{\phi(x,\bar{b}) | \bar{b} \in \mathfrak{C} \text{ و } \{i \in I | \not\models \phi(a_i,\bar{b})\} \text{ متناهی است}\}$$

فرض کنید $I_\circ$ یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی از I باشد.

ادّعای ۲۲۵. $Av(I)$ روی $I_\circ$ تعریف‌شدنی است و بنابراین روی آن نمی‌فرکد. هم‌چنین $Av(I) \restriction I_\circ$ یک تایپِ مانا است.

هم‌چنین داریم

$$\forall a_i \in I - I_\circ \quad a_i \models Av(I) \restriction I_\circ.$$

بنابراین $(a_i)_{i\in I-I_\circ}$ یک دنباله‌ی مُرلی در $Av(I) \restriction I_\circ$ است. برای رسیدن به حکم، در شروع اثبات، I را با یک دنباله‌ی بازنشناختنیِ I' جای‌گزین می‌کنیم که $I' - I$ نامتناهی باشد. □

لمِ ۲۲۶. فرض کنید I دنباله‌ای مُرلی در تایپی مانا روی A باشد. اگر $I \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A B$ آن‌گاه I دنباله‌ای مُرلی روی AB است.

اثبات. کافیست نشان دهیم که I روی AB مستقل است. می‌خواهیم از

$$a_{<i} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{A} a_i$$

به

$$a_{<i} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{AB} a_i$$

برسیم. دلالت بالا بنا بر

$$B_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{A} a_{<i} a_i$$

و لم زیر درست است. □

لمِ ۲۲۷. فرض کنید $a_۱ a_۲ \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A B$. آن‌گاه

$$a_۱ \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{A} a_۲ \Leftrightarrow a_۱ \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{AB} a_۲.$$

بیان جامع‌ترِ لمِ ۲۲۶:

لمِ ۲۲۸. فرض کنید $p \in S(A)$ مانا باشد و I دنباله‌ای مُرلی در آن.

۱. فرض کنید $A \subset B$ و $I_\circ \subseteq I$ و $I \downarrow_{AI_\circ} B$. آن‌گاه $I - I_\circ$ دنباله‌ای مُرلی در گسترشِ نافرکانِ یکتای p به B است.

۲. تایپِ $Av(I)$ گسترشِ یکتای نافرکِ جهانیِ p است.

جلسه‌ی هیجدهم

توجه ۲۲۹. تمرینِ ۹.۱.۱ در کتاب نادرست است، ولی برای اثباتِ لمِ زیر، برخلاف آنچه در کتاب نوشته شده، نیازی به بکارگیریِ آن نیست.

لمِ ۲۳۰. فرض کنید I روی A بازنشناختنی باشد و B مجموعه‌ای باشد شمارا. آن‌گاه زیردنباله‌ای شمارا مانندِ $I_\circ$ از I داریم که $I - I_\circ$ روی $ABI_\circ$ بازنشناختنی است.

نکته‌ی مهم در اثباتِ لم بالا این است که وقتی T بسیارمتعالی باشد،بسیار ثابت است و از این رو برای هر $p \in S(C)$ یک $C \subseteq_{\text{متناهی}} C_\circ$ پیدا می‌شود که p روی $C_\circ$ نفرکد.

اندکی نظریه‌ی مجموعه

به یادآوریم که

$$\omega_1 = \aleph_1 = \{\text{همه‌ی اوردینال‌های شمارا}\}.$$

به $C \subseteq \omega_1$ می‌گوئیم کلاب [13] هرگاه بی‌کران و بسته باشد. بسته یعنی

$$\forall \lambda \quad \underbrace{\sup(\lambda \cap C)}_{\text{اوردینال حدی}} \in C$$

معادلاً

$$\forall c_i \in C \quad c_\circ < c_1 < \ldots \in \omega_1 \Rightarrow \sup(c_i) \in C.$$

ملاحظه‌ی ۲۳۱. اگر C_i ها کلاب باشند، هم‌چنین است $\bigcap_{i\in\omega} C_i$. برای اثبات از تعریف دوم استفاده کنید.

قضیه‌ی ۲۳۲. در زیر دو بیانِ معادل از قضیه‌ی «فُودُور» [14] را نوشته‌ایم.

۱. اگر C_α ها برای $\alpha < \omega_1$ کلاب باشند، اشتراک قطریشان C نیز کلاب است:

$$C := \{\alpha | \alpha \in \bigcap_{\beta<\alpha} C_\beta\}.$$

[13] club=closed, unbounded

[14] Fodor

۲. فرض کنید D کلاب باشد و $f : D \to \omega_1$ تابعی باشد کاهنده [۱۵]؛ یعنی $f(\alpha) < \alpha$. آن‌گاه اوردینالی داریم مانند β به‌گونه‌ای که

$$\{\alpha \in D | f(\alpha) = \beta\}$$

مانا [۱۶] باشد.

تمرین ۲۳۳. نشان دهید دو بیان بالا معادلند.

قضیه‌ی ۲۳۴. فرض کنید T بسیارمتعالی باشد.

۱. M روی A اول است اگروتنهااگر M روی A اتمی باشد و M شامل هیچ دنباله‌ی بازنشناختنیِ ناشمارائی نباشد.

۲. روی هر مجموعه‌ی پارامترِ A گسترشی اول داریم، و این گسترشِ اول در حد ایزومرفیسم یکتاست.

مثالِ ۲۳۵. تئوریِ میدان‌های بسته‌ی دیفرانسیلی، DCF_0؛ یعنی تئوریِ کامل یک میدانِ $(K, +, ., d)$. این تئوری دارای حذف سور است و وجود مدلِ اول روی هر میدان دیفرانسیلی در نظریه‌ی مدل ثابت شده است.

اثبات. فرض کنید M/A اول باشد. از آن‌جا که T بسیار متعالی است، A دارای یک گسترشِ اول ساخته‌شدنی مانندِ M' است. یعنی

$$M' = \{b_\alpha | \alpha < \lambda\} \supset A \quad \text{تکینه } \operatorname{tp}(b_\alpha / A b_{<\alpha})$$

توجه ۲۳۶. علتِ وجودِ M' این است که از آن جا که T بسیارمتعالی است، هر فرمولِ سازگارِ $\phi(x)/$ متعلق به تایپی تکینه در $S(B)$ است.

حال از آن‌جا که M'/A اتمی است و $\underbrace{M \to M'}_{\prec}$ نتیجه می‌گیریم که M/A نیز اتمی است.
حال می‌خواهیم نشان دهیم که M شامل هیچ دنباله‌ی بازنشناختنیِ ناشمارائی نیست. بی کاستن از کلیت فرض می‌کنیم که M ساخته‌شدنی است و

$$M = \{b_\alpha | \alpha < \lambda\}.$$

تعریفِ ۲۳۷. زیرمجموعه‌ی $C \subseteq M$ را بسته می‌خوانیم هرگاه برای هر $b_\alpha \in C$ یک فرمولِ ایزوله‌کننده‌ی $\operatorname{tp}(b_\alpha / A b_{<\alpha})$ داشته باشیم که پارامترهایش در C است.

معادلِ تعریفِ بالا این است که

$$\operatorname{tp}(b_\alpha / A(b_\alpha \cap C)) \vdash \operatorname{tp}(b_\alpha / A b_{<\alpha}).$$

[۱۵] regressive

[۱۶] stationary

عبارت بالا را می‌توان به‌گونه‌ی زیر نیز نوشت:

$$b_\alpha \underset{A(b_{<\alpha\cap C})}{\overset{w}{\downarrow}} Ab_{<\alpha}$$

که چنین خوانده می‌شود: عبارت سمت چپ و راست عمودِضعیفند. [۱۷]

تمرین ۲۳۸. نشان دهید که رابطه‌ی

$$\mathrm{tp}(a/B) \vdash \mathrm{tp}(a/BC)$$

یا

$$a \underset{B}{\overset{w}{\downarrow}} c$$

رابطه‌ای تقارنی است. معادلاً فرض کنید $p(x) = \mathrm{tp}(a/B)$ و $q(y) = \mathrm{tp}(c/B)$ و

$$\mathrm{tp}(a/B) \vdash \mathrm{tp}(a/BC)$$

و آنگاه نشان دهید که $p(x) \cup q(y) = r(x, y)$ تایپی کامل روی B است. دو تایپِ p و q را عمودِضعیف می‌خوانیم.

ویژگی‌ها:

۱. اجتماع مجموعه‌های بسته، بسته است.

۲. هر $b \in M$ در یک مجموعه‌ی بسته‌ی متناهی واقع می‌شود.

۳. اگر C بسته باشد، M روی AC ساخته‌شدنی است.

ادامه‌ی اثباتِ قضیه. فرض کنید $(c_\alpha)_{\alpha<\omega}$ دنباله‌ای از بازنشناختنی‌های دوبه‌دومتمایز در M روی A باشد. دنباله‌ای صعودی از مجموعه‌های بسته‌ی شمارای

$$C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_\alpha \quad (\alpha < \omega_1)$$

می‌سازیم با این ویژگی که

$$c_\alpha \in C_{\alpha+1}.$$

(از ویژگیِ ۲ استفاده می‌کنیم). کلابی مانند $D \subset \omega_1$ داریم که برای هر $\delta \in D$، مجموعه‌ی $\{c_\alpha | \alpha \geq \delta\}$ روی C_δ بازنشناختنی باشد (بنا به نتیجه‌ای از ۲۳۰). هر تایپِ تعریف کنید

$$f(\delta) = \alpha$$

[۱۷] weakly orthogonal

اگر $\delta > \alpha$ و $\mathrm{tp}(c_\delta/C_\delta)$ را فرمولی در C_α ایزوله کند. بنابر فودور بی‌کرانْ تعداد δ و یک β ی ثابت داریم که $\delta > \beta = f(\delta)$. فرض کنید $\delta, \delta' > \beta$ جزء آنها باشند. تایپِ $\mathrm{tp}(c_{\delta'}/C_\beta c_\delta)$ را فرمول‌هائی در C_β ایزوله می‌کنند. بنابراین

$$\mathrm{tp}(c_\delta/C_\beta) \vdash \mathrm{tp}(c_{\delta'}/C_\beta c_\delta)$$

و هم‌چنین

$$\mathrm{tp}(c_\delta/C_\beta) = \mathrm{tp}(c_{\delta'}/C_\beta)$$

و این ناممکن است، زیرا $c_\delta \neq c_{\delta'}$.

اثباتِ جهت دیگر قضیه، در جلسه‌ی بعد. $\square$

جلسه‌ی نوزدهم

در این جلسه ثابت خواهیم کرد که هرگاه T بسیارمتعالی و M/A مدلی اتمی از آن باشد که هیچ دنباله‌ی بازنشناختنیِ ناشمارائی دربرندارد، آنگاه M اول است. اثبات ارائه‌شده، بویژه یکتائی مدلِ اول را نیز نشان می‌دهد.

یادآوریِ ۲۳۹. فرض کنید $K \subset F \subset K_{alg}$ میدان باشند. می‌گفتیم F/K نُرمال است هرگاه هر چندجمله‌ایِ کاهش‌ناپذیرِ $p(x) \in K[X]$ که ریشه‌ای در F دارد، همه‌ی بقیه‌ی ریشه‌هایش نیز در F باشند. در این صورت برای هر $\alpha \in Aut(K_{alg}/K)$ داریم $\alpha F = F$.

یادآوریِ بالا ایده‌ی تعریفِ زیر است.

تعریفِ ۲۴۰. فرض کنید $A \subset B \subset M$. می‌گوئیم B/A نرمال است هرگاه، اگر تایپِ $p \in S(A)$ برآورنده‌ای در B داشته باشد، همه‌ی برآورندگانِ در M از p در B باشند. می‌توان دید که در این صورت، همه‌ی اتومرفیسم‌های M که A را ثابت نگه می‌دارند، B را نیز ثابت نگه می‌دارند.

لمِ ۲۴۱. فرض کنید T بسیارمتعالی باشد. اگر B/A در M نرمال باشد آنگاه اگر M/A اتمی باشد، M/B نیز اتمی است.

اثبات. فرض‌کنید $\mathrm{tp}(\bar{m}/A) = [\phi(x)]$. فرمولِ $\psi(x, \bar{b}') \subseteq \phi(x)$ را چنان برگزینید که روی B کامل باشد (این امر از این رو ممکن است که در T تایپ‌های تکینه، چگالند). منظور از کامل بودن ψ این است که $\{\xi | T \models \psi \to \xi\}$ تایپ کامل است. فرض کنید $\mathrm{tp}(\bar{b}'/A\bar{m}')$ تکینه باشد و $\mathrm{tp}(\bar{m}/A) = \mathrm{tp}(\bar{m}'/A)$، عنصری چون $\bar{b} \in M$ داریم که

$$\bar{m}\bar{b} \equiv_A \bar{m}'\bar{b}'$$

و بنا به نرمال بودن، $\bar{b} \in B$.

ادّعای ۲۴۲. $\phi(x,\bar{b})$ روی B کامل است، یعنی

$$\operatorname{tp}(\bar{m}/B) = [\phi(x,\bar{b})].$$

یعنی

$$\alpha \in Aut(M/A) \quad \alpha b' = b \Rightarrow \text{ .کامل است } \alpha B = B \text{ روی } \phi(x,\bar{b})$$

اثبات. فرمولِ $\xi(x,\bar{c})$ را در نظر بگیرید که در آن $\bar{c} \in B$. بنا به اتمی بودن، عنصرِ $\bar{c}' \in M$ چنان یافت می‌شود که

$$\bar{b}'\bar{c}' \equiv_A \bar{b}\bar{c}.$$

ازآن‌جاکه B/A نرمال است، $\bar{c}' \in B$. ازآن‌جاکه $\phi(x,\bar{b}')$ روی B کامل است، داریم $\phi(x,\bar{b}') \subset \xi(x,\bar{c}')$. درنتیجه، $\phi(\bar{x},\bar{b}) \subset \xi(x,\bar{c})$. $\square$

حال فرض کنید N/A یک مدل باشد.

ادّعای ۲۴۳. برای هر $p \in S(A)$ (تایپِ یک متغیره) اگر B/A نرمال باشد، هر نشاندن مقدماتیِ $B \underset{A}{\rightarrow} N$ را می‌توان به یک نشاندنِ مقدماتیِ $B \cup p(M) \underset{A}{\rightarrow} N$ گستراند.

ملاحظه‌ی ۲۴۴. اگر ادعای بالا ثابت شود، اثباتِ قضیه به‌گونه‌ی زیر پایان می‌یابد. فرض کنید $(p_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ شمارشی از $S(A)$ باشد. بگیرید $B_\circ = A$ و $B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} p_\beta(M)$. همه‌ی گسترشها نرمالند. بنا به ادعا هر $B_\alpha \rightarrow_A N$ را می‌توان به $B_{\alpha+1} = B_\alpha \cup p_\alpha(M) \rightarrow N$ گستراند.

اثباتِ ادعا. با استقرا روی $\operatorname{RM}(p)$ ادعا را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $(c_i)_{i<\mu}$ مجموعه‌ای مستقلِ ماکزیمال از برآورده‌گرانِ p باشد.

تمرین ۲۴۵. اگر p تایپی مانا می‌بود، دنباله‌ی یادشده روی A بازنشناختنی می‌بود و از این رو $|\mu| \leq \omega$.

تایپِ p دارای متناهی عدد «ماناشده» است؛ یعنی متناهی عدد گسترش به $\operatorname{acl}^{eq}(A)$. از این نتیجه می‌شود که اگر p مانا هم نباشد، باز $|\mu| \leq \omega$. بنابراین بی کاستن از کلّیت فرض می‌کنیم $\mu = \omega$. بگیرید

$$\begin{aligned}
&\mu = \omega \quad c_\circ, c_1, \ldots, \\
&A_i = A \cup \{c_\circ, \ldots, c_{i-1}\} \\
&B_i = B \cup \{a \in M | \operatorname{RM}(a/A_i) < \alpha\} \\
&B_i/A_i \text{ نرمال در } M \quad M/A_i \text{ اتمی}
\end{aligned}$$

ازآنجاکه M/B اتمی است، f گسترشی به $B \cup A_1$ دارد. بنابه استقرا گسترشی به B_1 داریم. به همین صورت به A_2, B_2, A_3, B_3 گسترش می‌دهیم و در نهایت به گسترشی به $\bigcup_{i<\omega} B_i$ می‌رسیم. حال M روی A اتمی است، زیراکه روی A_1 نرمال است. پس روی $B_1 A_2$ اتمی است زیرا $A_2 - A_1$ متناهی است. پس روی B_3 اتمی است زیرا روی A_2 نرمال است و به‌همین‌ترتیب.

توجه ۲۴۶. $p(M) \subseteq \bigcup B_i$. پس اگر $c \in p(M)$ آنگاه

$$c \underset{A}{\not\perp} c_0, c_1, \ldots$$

بنابراین عدد i ای داریم که

$$c \underset{A}{\not\perp} c_0 \ldots, c_{i-1}$$

یعنی

$$\mathrm{RM}(c/Ac_0 \ldots c_{i-1}) < \alpha.$$

اثبات ادّعا

□

اثبات قضیه

□

تئوری‌های ثابتِ شمارا

توجه ۲۴۷. دوره‌ی نظریه‌ی مدلِ ۲، تا چهار جلسه‌ی دیگر ادامه داشت که دو جلسه از آن درباره‌ی مدولار بودن را من درس داده‌ام و دو جلسه‌ی آخر درباره‌ی ساختارِ هروشوفسکی را آقای زیگلر. بنا به شباهت زیاد آنها با کتاب، از بازنویسیشان خودداری کرده‌ام. گفتنی است که بحث ساختارهای هراشوفسکی از روی یادداشت‌های آقای زیگلر برای دوره‌ی درسی‌شان در بارسلونا با همین عنوان، درس داده شده است.

لمِ ۲۴۸. فرض کنید T شمارا و ثابت باشد. اگر B/A ساخته‌شدنی باشد، آنگاه برای هر $D \subseteq B$، D/A نیز ساخته‌شدنی است.

لمِ ۲۴۹. فرض کنید T دلخواه باشد. مدل‌های ساخته‌شدنیِ اول، یکتایند (یعنی روی هر مجموعه‌ی پارامتر، در حد ایزومرفیسم، تنها یک مدل اول داریم).

نتیجه‌ی ۲۵۰. فرض کنید T ثابت و شمارا باشد و روی هر مجموعه‌ی پارامتر، مدل اولی داشته باشد. آنگاه مدل‌های اول روی یک مجموعه‌ی پارامتر داده شده، یکتایند (=ایزومرفند).

اثبات. فرض کنید M/A اول باشد و N/A ساخته شدنی باشد. از آنجاکه $M \subseteq N$ بنا به لمِ ۲۴۸ M نیز ساخته‌شدنی است. حال از لمِ ۲۴۹ نتیجه حاصل می‌شود. □

نکته‌ای درباره‌ی استقلال جبری و خطی، حدس زیلبر و ساختار هراشوفسکی

جزوه را با یادآوری نکته‌ای که چندین بار بر آن تأکید کرده‌ام به پایان می‌برم. به جفتِ (X, cl) پیش‌هندسه می‌گوئیم هرگاه $\mathrm{cl} : P(X) \to P(X)$ نگاشتی با ویژگی‌های زیر باشد:

۱. $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$.

۲.

$$\mathrm{cl}(A) = \bigcup_{\underbrace{A' \subseteq A}_{\text{متناهی}}} \mathrm{cl}(A')$$

۳. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$.

۴. $a \in \mathrm{cl}(Ab) - \mathrm{cl}(A) \Rightarrow b \in \mathrm{cl}(Aa)$.

هر پیش‌هندسه‌ای زیرمدولار است؛ یعنی

$$\forall A, B \quad \dim(A \cup B) \leq \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B).$$

برخی پیش‌هندسه‌ها مدولار نیز هستند.

تعریفِ ۲۵۱. پیش‌هندسه‌ی مدولار، پیش‌هندسه‌ای است که در آن برای هر مجموعه‌ی بسته‌ی A, B داشته باشیم

$$\dim(A \cup B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B).$$

فضاهای برداری، مثالِ نوعی پیش‌هندسه‌ی مدولارند و میدان‌های بسته‌ی جبری مثالی برای پیش‌هندسه‌های نامدولار. هر دوی این فضاها تئوری بسیارکمینه دارند. مدولار بودن را می‌توان با توضیح زیر بهتر فهمید. تعریف کنید

$$A \underset{C}{\overset{\circ}{\downarrow}} B \Leftrightarrow \mathrm{cl}(AC) \cap \mathrm{cl}(BC) = \mathrm{cl}(C)$$

و

$$A \underset{C}{\overset{\mathrm{cl}}{\downarrow}} B \Leftrightarrow \text{ مستقل جبریند } A, B$$

یعنی

$$A \underset{C}{\overset{\mathrm{cl}}{\downarrow}} B \Leftrightarrow \forall A_\circ \subseteq A \quad \forall B_\circ \subseteq B$$

$$(A \text{ مستقل روی } A_\circ \text{ و } B \text{ مستقل روی } B_\circ) \Rightarrow (A_\circ \cap B_\circ = \emptyset \text{ و مستقل } A_\circ \cup B_\circ)$$

در پیش‌هندسه‌های مدولار داریم

$$\overset{\circ}{\downarrow} = \overset{\mathrm{cl}}{\downarrow}.$$

منظور از پیش‌هندسه‌ی موضعاً مدولار، پیش‌هندسه‌ای است که در آن

$$\forall \underbrace{A, B}_{\text{بسته}} \quad (A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \dim(A \cup B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)).$$

اگر T بسیارمتعالی و بسیارکمینه باشد، موضعاً مدولار بودن معادل است با تک‌پایه‌ای بودن.

تعریفِ ۲۵۲. منظور از تئوریِ تک‌پایه، تئوری‌ای است که در آن

$$\forall A, B \quad A \underset{\mathrm{acl}^{eq} A \cap \mathrm{acl}^{eq} B}{\overset{\mathrm{cl}}{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}} B$$

توجه کنید که

۱. زیلبر نشان داده است که تئوری‌های بسیارکمینه‌ی اُمگاجازم، موضعاً مدولارند.

۲. اگر T بسیارمتعالی (یا اگر ثابت) باشد و در آن میدانی نامتناهی تعبیر شود، T تک‌پایه‌ای نیست.

۳. زیلبر حدس زد که برعکسِ عبارت بالا درست باشد: اگر T بسیارکمینه باشد و تک‌پایه‌ای نباشد، در آن میدانی نامتناهی تعبیر می‌شود (در T^{eq}).

۴. حدس زیلبر را هروشوفکسی رَد کرده است. در ردِ این حدس ساختاری ارائه می‌شود که با آنکه بسیارکمینه است و نامدولار، هیچ میدانی در آن تعبیر نمی‌شود. این ساختار، حدِّ فِرِسه‌ی کلاسی از ساختارهای متناهی در زبانی با یک رابطه‌ی سه‌تائی است.