Universität Freiburg, Abteilung für Mathematische Logik
Übung zur Vorlesung Modelltheorie 2, ss2015
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Mohsen Khani

Blatt 2, einfache Theorien, Miterben

Aufgabe 1 (zwei Versionen der gleichen Aussage)**.**

1. Sei $\phi(x, b)$ eine Formel die über A teilt. Sei $C \supset A$. Dann es ein $b' \equiv_A b$ gibt, sodaß $\phi(x, b')$ über C teilt.
2. Nehmen wir an, dass $\phi(x, b)$ über A teilt und $A \subseteq C$. Zeigen Sie, dass es ein $C' \equiv_A C$ gibt, sodass $\phi(x, b)$ über C' teilt.

Aufgabe 2.

Definition. Wir sagen, dass $\phi(x, y)$ Ordnung Eigenschaft hat, wenn es Folgen $(a_i)_{i<\omega}, (b_i)_{i<\omega}$ geben, sodass $\models \phi(b_j, a_i) \Leftrightarrow j < i$; das heißt, $\phi(x, a_i)$ definiert auf $B = \{b_j | j < \omega\}$ eine Kette von Teilmengen. Wenn es eine Formel $\phi(x.y)$ gibt und eine Folge $(a_i)_{i<\omega}$, sodass $\phi(-, a_i)$ eine unendliche Kette von Teilmengen definiert, sagen wir dass ϕ SOP (=strict order property, streng Ordnung Eigenschaft) hat. Also:

$$\phi(\mathfrak{C}, a_0) \subset \phi(\mathfrak{C}, a_1) \subseteq \dots .$$

Zeige SOP$\Rightarrow$ nicht einfach.

Shelah: Stabil=NIP+$\neg$ SOP.

Aufgabe 3.

Definition. Seien M ein Modell, M Teilmenge von A, und $q \in S(A)$. q heißt das Miterbe (coheir auf englisch) von $q|_M$, wenn q endlich erfüllbar in M ist.

Beispiel. $A = M$, $q \in S(M)$ beliebig.

Seien $A \subseteq A'$ und $q \in S(A)$ Miterbe von $q|_M$. Dann es einen Typ $q' \in S(A')$ gibt mit $q \subseteq q'$, sodass q' auch Miterbe von $q|_M$ ist.

Aufgabe 4.

1. q ist ein Miterbe, genaue dann wenn $q = \{\phi(x,a)|\phi(M,a) \in U, a \in A\}$, wobei U ein Ultrafilter auf M ist.

2. Seien M ein Model, M Teilmenge von A und $p \in S(M)$. Alle Miterbe (Erweiterungen) von p kriegen wir auf folgende Weise. Sei p das F-Limit der Familie $\{\mathrm{tp}(m/M)|m \in M\}$, wobei F ein Ultrafilter auf M ist. Das F-Limit der Familie $\{\mathrm{tp}(m/A)|m \in M\}$ ist ein Miterbe von p. Sehe folgende Bemerkung und Definition.

Bemerkung. Sei X ein Kompakter topologische Raum und F ein Ultrafilter auf I. Jede Familie $\{x_i|i \in I\}$ hat ein eindeutiges F-Limit.

Definition. Sei X ein Kompakter topologischer Raum, und F ein Ultrafilter auf I. x heißt des F-Limit der Familie $\{x_i|i \in I\}$, wenn für jede offene Umgebung O von x, die folgende Menge in F bleibt:

$$\{i \in I|x_i \in O\}.$$

Aufgabe 5.

1. Der Beweis von:

   stabil$\Rightarrow$ einfach (Baum Eigenschaft $\Rightarrow$ Ordnung Eigenschaft).

2. Der Beweis von Erdös-Rado Lemma:

$$\beth_n^+(\mu) \to (\mu^+)_\mu^{n+1}.$$